индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-867(18)-86

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒ

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУ

Н.З.АКОПОВ, Г.К.САВВИДИ,

Н.Г.ТЕР-АРУТЮНЯН-САВВИДИ

МАТРИЧНЫЙ ГЕНЕРАТОР ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

ЦНИИатоминформ

ЕРЕВАН-1986

Նախնատիպ ЕФИ-867(I8)-86

Ն.Զ.ԱԿՈՊՈՎ, Գ.Ս.ՍԱՎԻԴԻ,
Ն.Գ.ՏԵՐ-ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ-ՍԱՎԻԴԻ

ԹՎԱՑՅԱԼ-ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԳԵՆԵՐԱՏՈՐ

Առաջարկվում է բազմաչափ հիպերխորանարդերի արտապատկերի հիման վրա թվացյալ/պսեվդո/-պատահական թվերի մատրիցային գեներատորի որոշակի մոդելը/կաղապարը/: Անցկացվում է, այսպիսով, ստացված թվացյալ-պատահական թվերի վիճակագրական վերլուծություն:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1986

В [I] предлагалось использовать K - системы Колмогорова в качестве генераторов псевдослучайных чисел при моделировании физических систем методом Монте-Карло.

Основная идея этого подхода состоит в том, что псевдослучайная последовательность $\{P_N\}$ представляется траекторией некоторой динамической системы, фазовое пространство которой представляет собой d - мерный гиперкуб Π^d. Для того, чтобы траектория равномерно заполняла этот гиперкуб Π^d, система должна быть максимально неустойчивой. Как известно, таковыми являются K - системы Колмогорова.

В [I] предлагалось использовать автоморфизмы компактных коммутативных групп, которые задаются целочисленной матрицей $A = \| a_{ij} \|$

$$P_N = A P_{N-1}\ , \ \mathrm{mod}\ 1, \qquad (I)$$

где P- d- мерный вектор, принадлежащий Π^d, с координатами $P = (x_1, x_2, \ldots x_d)$, матрица A имеет определитель, равный единице

$$\mathrm{Det}\, A = \pm 1, \qquad (2)$$

что обеспечивает сохранение фазового объема. Кроме того, чтобы автоморфизм (I) представлял собой K – систему, необходимо, чтобы все его собственные значения λ_K по модулю отличались от единицы.

$$|\lambda_K| \neq 1 \qquad K = 1 \ldots d. \tag{3}$$

Таким образом, задача построения псевдослучайной последовательности $\{P_N\}$ сводится к построению матрицы A с детерминантом, равным единице, и отличными по модулю от единицы собственными значениями.

Ниже предлагается очень простой рекуррентный способ построения матрицы A произвольного порядка d.

Пусть у нас уже есть матрица размера $\| d-1 \otimes d-1 \|$ с детерминантом, равным единице, составим новую матрицу размера $\| d \times d \|$ так, чтобы на её диагонали находились единица и матрица $\| d-1 \otimes d-1 \|$, а в остальных местах записаны нули:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \multicolumn{3}{c}{\{ \| d-1 \otimes d-1 \| \}} \\ 0 & & & \end{matrix} \right\| \tag{4}$$

Очевидно, детерминант этой новой матрицы равен также единице. Поскольку операция вычисления детерминанта инвариантна относительно почленного сложения строк или столбцов, можно, не изменяя значения детерминанта (4), получать из нее матрицы, у которой уже нет нулей в первой строке и первом столбце. Такая процедура позволяет получить большой набор матриц, пригодных для автоморфизма (I). Остается только проверить, что все λ_K по

модулю отличны от единицы. Общего метода такой проверки у нас нет, правда, в каждом конкретном случае это в принципе можно сделать. Конкретный вид матриц, который использовался нами, имеет вид

$$A_d = \left\| \begin{matrix} 2 & 3 & \cdot & d & 1 \\ 1 & 2 & \cdot & d-1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & d-2 & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

При $d = 2, 3, 4$ они равны:

$$A_2 = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad A_3 = \left\| \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad A_4 = \left\| \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{6}$$

и т.д. Для того, чтобы реализовать отображение (I) и построить конкретную траекторию, нужно задать начальный вектор P_0

$$P_0 = (x_1^{(0)}, \ \ldots \ x_d^{(0)}). \tag{7}$$

Следующая точка траектории строится с помощью (I)

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_d^{(1)} \end{pmatrix} = \underset{\text{mod } 1.}{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1d} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{d1} & \ldots & a_{dd} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_d^{(0)} \end{pmatrix} = AP_0 \tag{8}$$

Затем нужно опять подействовать матрицей A уже на P_1

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_d^{(2)} \end{pmatrix} = \underset{\text{mod } 1.}{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1d} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{d1} & \ldots & a_{dd} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_d^{(1)} \end{pmatrix} = AP_1 \tag{9}$$

и т.д. Так что

$$P_N = \{ A \{ A \ldots \{ AP_0 \} \} \ldots \}, \tag{10}$$

Точки P_0, P_1, ... P_N и составляют искомую траекторию в гиперкубе Π^d. Сходимость сумм к интегралу

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(P_k) \longrightarrow \int_{\Pi^d} f(P)\,dP \qquad (11)$$

определяется скоростью роста отклонения D_N [3,4]. Вычисление D_N даже на ЭВМ - нелегкая задача, поэтому в настоящей работе мы ограничились пока вычислением χ^2_S [2-5], для того, чтобы оценить степень равномерности.

Расположим последовательность P_0, P_1, ... в следующем виде:

$$x_1^{(0)}, \ldots x_d^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots x_d^{(1)}, x_2^{(2)} \ldots x_d^{(2)}, x_1^{(3)} \ldots \qquad (12)$$

и забудем о том, как она была нами получена. Теперь, точно так же, как для мультипликативного датчика [2-5], можно составлять "слова" длины K

$$\begin{gathered}(x_1^{(0)} \ldots x_K^{(\,)})\\ (x_{K+1}^{(0)} \cdots x_{2K}^{(\,)})\\ \ldots\end{gathered} \qquad (13)$$

и представить их точками K - мерного куба Π^K. Изменяя K от 1 до d и далее, получим точки, заполняющие куб различной размерности. С помощью критерия χ^2_S можно оценить, в какой степени полученные таким образом точки равномерно заполняют куб Π^K.

Нами рассматривались случаи матриц типа (5) вплоть до $d = 12$, а критерий χ^2_S проверялся для $K = 1, 2, 3, 4$. При этом каждое ребро Π^K делилось на десять отрезков, так,

что имеем

$$\begin{aligned}\chi^2_{S-1} &= \chi^2_9 && \text{для } \Pi^1,\\ \chi^2_{S-1} &= \chi^2_{99} && \text{для } \Pi^2,\\ \chi^2_{S-1} &= \chi^2_{999} && \text{для } \Pi^3,\\ \chi^2_{S-1} &= \chi^2_{9999} && \text{для } \Pi^4,\end{aligned} \qquad (14)$$

где S - число степеней свободы $S = 10^K$.

Ниже приводятся значения χ^2_{S-1} для различных матриц (6),(5)

A_2 :
$\chi^2_9 = 7{,}9$ $\qquad x_1^{(0)} = \pi/7$
$\chi^2_{99} = 106{,}6$ $\qquad x_2^{(0)} = 1/\sqrt{2}$
$\chi^2_{999} = 34046$
$\chi^2_{9999} = 5769697$

A_3 :
$\chi^2_9 = 10{,}17$ $\qquad x_1^{(0)} = \pi/7$
$\chi^2_{99} = 101{,}3$ $\qquad x_2^{(0)} = 1/\sqrt{2}$
$\chi^2_{999} = 1080{,}6$ $\qquad x_3^{(0)} = 1/\sqrt{5}$
$\chi^2_{9999} = 191626$,

A_4 :
$\chi^2_9 = 10{,}4$ $\qquad x_1^{(0)} = \pi/7$
$\chi^2_{99} = 117{,}1$ $\qquad x_2^{(0)} = 1/\sqrt{2}$
$\chi^2_{999} = 1031$ $\qquad x_3^{(0)} = 1/\sqrt{5}$
$\chi^2_{9999} = 10209{,}1$ $\qquad x_4^{(0)} = 0{,}64873916$

A_6 :
$\chi^2_9 = 4$ $\qquad x_1^{(0)} = \pi/7$
$\chi^2_{99} = 92{,}3$ $\qquad x_2^{(0)} = 1/\sqrt{2}$
$\chi^2_{999} = 961{,}7$ $\qquad x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$
$\chi^2_{9999} = 9648$

$$\mathcal{A}_{12}: \quad \chi^2_{9} = 9{,}5 \qquad x_1^{(0)} = \pi/7 \qquad x_7^{(0)} = \{\sqrt{23}\}$$

$$\chi^2_{99} = 80{,}9 \qquad x_2^{(0)} = 1/\sqrt{2} \qquad x_8^{(0)} = \{\sqrt{13}\}$$

$$\chi^2_{999} = 95\mathrm{I}{,}8 \qquad x_3^{(0)} = \{\sqrt{5}\} \qquad x_9^{(0)} = \{\sqrt{17}\}$$

$$\chi^2_{9999} = 9900{,}8 \qquad x_4^{(0)} = \{\sqrt{11}\} \qquad x_{10}^{(0)} = \{\sqrt{29}\}$$

$$x_5^{(0)} = \{\sqrt{3}\} \qquad x_{11}^{(0)} = \{\sqrt{3}\}$$

$$x_6^{(0)} = \{\sqrt{7}\} \qquad x_{12}^{(0)} = \{1/\sqrt{11}\}$$

Во всех этих примерах $N/S = 24$. Для сравнения ниже приводятся значения χ^2_{S-1} для стандартного мультипликативного датчика ЭВМ БЭСМ-6:

$$\chi^2_{9} = 8{,}9$$

$$\chi^2_{99} = 97{,}8$$

$$\chi^2_{999} = \mathrm{I}007{,}5$$

$$\chi^2_{9999} = \mathrm{I}030\mathrm{I}{,}\mathrm{I}\ .$$

Видно улучшение статистических свойств с увеличением размерности матрицы $\mathcal{A}_d$.

Было проведено также вычисление зависимости величины χ^2_{S-1} от общего количества генерируемых точек для матрицы $\mathcal{A}_{12}$. Ниже приводятся эти значения для матрицы $\mathcal{A}_{12}$ и RNDM БЭСМ-6.

$\mathcal{A}_{12}$

N/S	48	72	96	I44
χ^2_{9}	7,9	I0,I	6,3	9,83
χ^2_{99}	82	I05,3	9I,8	95
χ^2_{999}	I02I	968,5	I006,9	999,5
χ^2_{9999}	9955,3	9976,4	I0069	9846

RNDM БЭСМ-6

$N\|S$	48	72	96	I44
χ^2_{9}	5,5	4,I	6,3	I2,2
χ^2_{99}	II2,3	II3,9	I08,4	I0I
χ^2_{999}	I075,7	I054	I038,8	I024
χ^2_{9999}	I032I	I0I30,9	I0249,6	I0373

Средние взвешенные значения $\bar{\chi}^2_{S-1}$:

$$\bar{\chi}^2_{S-1} = \frac{\sum \chi^2_{S-1}(i)\cdot N_i/S-1}{\sum\limits_i N_i/S-1}$$

равны

$\mathcal{A}_{12}$	RNDM
9,4I	9,I
90,9	I04,8
I00I,4	I035,2
9935,6	I032I,5

Большим преимуществом матричного генератора является возможность широко менять начальные параметры начального вектора $P_0 = \{x_1^{(0)} \ldots x_d^{(0)}\}$ и матрицы $\mathcal{A}$ с той целью, чтобы иметь зависимость результатов Монте-Карло-расчетов от этих параметров, которая, естественно, должна быть слабой.

В заключение отметим, что предлагаемый выше матричный генератор можно с успехом реализовать на вычислительных машинах с матричным процессором. В настоящее время авторами заканчиваются исследования по использованию ещё одной динамической системы "бильярда Синая" в качестве датчика случайных чисел. Результаты будут опубликованы отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г. К проблеме Монте-Карло-моделирования физических систем. Препринт ЕФИ-865(I6)-86, Ереван, I986.
2. Knuth D.E. The art of computer programming Addison-Wesley, London 1969, vol.2.
3. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, I976.
4. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, I973.
5. Голенко Д.И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М.: Наука, I965.

Рукопись поступила 7 января I986 г.

Н.З.АКОПОВ, Г.К.САВВИДИ, Н.Г.ТЕР-АРУТЮНЯН-САВВИДИ
МАТРИЧНЫЙ ГЕНЕРАТОР ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ
Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать I9/III-86г. ВФ-05319 Формат 60x84/I6
Офсетная печать.Уч.изд.л. 0,5 Тираж 299 экз.Ц. 8 к.
Зак.тип.№ I84 Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна 2