индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-886(37)-86

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Э.Д.ГАЗАЗЯН, М.И.ИВАНЯН,
А.Д.ТЕР-ПОГОСЯН

РАВНОМЕРНАЯ КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КРУГЛОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

ЦНИИатоминформ

ЕРЕВАН-1986

Նախնատիպ ЕФИ-886(37)-36

ԳԱԶԱԶՅԱՆ Է.Դ., ԽԿԱՆՅԱՆ Մ.Խ., ՏԵՐ-ՊՈՂՈՍՅԱՆ Ա.Դ.

ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓԱՅԻՆ ԼՑՈՒՄՈՎ ԿԼՈՐԱՁԵՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔԱՏԱՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԿԱՐՃԱԼԻՔ ԱՍԻՄՊՏՈՏԸ

Կլորաձև, գլանային, առանցքային համաչափային լցումով ալիքատարի համար ստացված են կարճալիք ասիմպտոտային արտահայտությունները: Հետազոտված են դաշտերի երկրաչափաօպտիկական կառուցվածքը և հրկիզող /կաուստիկական/ մակերևույթները: Ցույց է տրված, որ դաշտերի ամպլիտուդների համար ստացված ասիմպտոտային արտահայտությունները հրկիզող մակերևույթների վրա մնում են վերջավոր:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1986

Разработанная в [I] равномерная коротковолновая асимптотическая теория уравнений Максвелла позволяет решить, в частности, проблему о собственных электромагнитных колебаниях в радиально-неоднородных волноводах. Эта проблема представляет несомненный интерес, например, в теории световодов, исследования которых проводились, в основном, в приближении скалярной волны (см.[2-5] и библиографию к ним).

Пусть среда, заполняющая круглый цилиндрический волновод, характеризуется коэффициентом преломления в цилиндрической системе координат r, φ, z (ось z направлена вдоль образующей волновода), описываемым выражением

$$n(r) = \sqrt{\varepsilon(r)\mu(r)} . \qquad (I)$$

В соответствии с методом, разработанным в [I] (см.также [6]), решение задачи будем конструировать с помощью функций, входящих в точное решение уравнения Гельмгольца в вакууме, а именно : $f_1(\xi_1) = J_m(k\xi_1)$ - функций Бесселя первого рода порядка m, $f_2(\xi_2) = e^{ik\xi_2}$ и $f_3(\xi_3) = e^{ik\xi_3}$. Координатные функции ξ_1, ξ_2, ξ_3 - аргументы указанных функций - подлежат определению из уравнений чений эйконалов. Равномерную коротковолновую асимптотику собственных электромагнитных колебаний (в нулевом приближении – разложения амплитуд по обратным степеням волнового числа ik) рассматриваемого волновода, согласно утверждениям работы [I] , запишем в виде:

$$\begin{matrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{matrix} = \sum_{\{i_1 i_2 i_3\}=0,1} \begin{matrix}\vec{A}^{i_1 i_2 i_3}\\ \vec{\mathcal{D}}^{i_1 i_2 i_3}\end{matrix} \frac{\xi_1^{i_1}}{(ik)^{i_1+i_2+i_3}} \frac{d^{i_1}}{d\xi_1^{i_1}} J_m(k\xi_1) \frac{d^{i_2}}{d\xi_2^{i_2}} e^{ik\xi_2} \frac{d^{i_3}}{d\xi_3^{i_3}} e^{ik\xi_3}. \qquad (2)$$

Подставляя выражения (2) для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в уравнения Максвелла, приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно геометрооптических амплитуд. Условием разрешимости этой системы является уравнение эйконала, которое с учетом ортогональности системы координат ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 записывается в виде:

$$\left[1-\left(\frac{m}{k\xi_1}\right)^2\right]\left(\frac{d\xi_1}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\xi_2}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d\xi_3}{dz}\right)^2=n^2(r). \qquad (3)$$

После разделения переменных из уравнения (3) получаем

$$\xi_3=C_3 z,\quad \xi_2=C_2\varphi=\frac{m}{k}\varphi,\quad \sqrt{1-\left(\frac{m}{k\xi_1}\right)^2}\,\frac{d\xi_1}{dr}=\sqrt{n^2-\left(\frac{m}{kr}\right)^2-C_3^2}\,, \qquad (4)$$

где C_3 и $C_2=\frac{m}{k}$ – константы разделения, m – целое число, что обусловлено симметрией задачи.

Уравнение каустики , в соответствии с [I] , суть:

$$1-\left(\frac{m}{k\xi_1}\right)^2=0$$

или

$$n^2(r_k)-\left(\frac{m}{kr_k}\right)^2-C_3^2=0 \qquad (5)$$

в цилиндрической системе координат r , φ , z .

Последнее из уравнений (4) можно интегрировать в области существования геометрооптических лучей и переписать его в виде равенства

$$\sqrt{\xi_1^2-\frac{m^2}{k^2}}-\frac{m}{k}\arccos\frac{m}{k\xi_1}=\int_{r_k}^{r}\sqrt{n^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2-c_3^2}\,dr, \qquad (6)$$

устанавливающего связь между координатами ξ_1 и r .

Применяя методику , развитую в [I] , приходим к следующим выражениям для отличных от нуля компонент амплитуд $\vec{A}^{i_1 i_2 i_3}$ и $\vec{\mathcal{D}}^{i_1 i_2 i_3}$:

$$A^{010}_{Hr}=\mathcal{X}(\xi_1)\sqrt{\mu(r)}\,A_0K^{0}_{r},\qquad \mathcal{D}^{101}_{Hr}=\mathcal{X}^{-1}(\xi_1)\sqrt{\varepsilon(r)}\,A_0K^{\frac{\pi}{2}}_{r},$$

$$A^{100}_{H\varphi}=\mathcal{X}^{-1}(\xi_1)\sqrt{\mu(r)}\,A_0K^{0}_{\varphi},\qquad \mathcal{D}^{011}_{H\varphi}=\mathcal{X}(\xi_1)\sqrt{\varepsilon(r)}\,A_0K^{\frac{\pi}{2}}_{\varphi}, \qquad (7)$$

$$A^{111}_{Hz}=\mathcal{X}^{-1}(\xi_1)\sqrt{\mu(r)}\,A_0K^{0}_{z},\qquad \mathcal{D}^{000}_{Hz}=\mathcal{X}(\xi_1)\sqrt{\varepsilon(r)}\,A_0K^{\frac{\pi}{2}}_{z},$$

где

$$A_0=\frac{const}{\sqrt{r}\,\sqrt[4]{L^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2}},\quad L(r)=\sqrt{n^2(r)-c_3^2},\quad \alpha=\frac{mc_3}{2k}\int_{r_k}^{r}\frac{dr}{rn(r)L(r)\sqrt{L^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2}}, \qquad (7a)$$

$$K^0_r=\frac{m}{krL(r)}\cos\alpha+\frac{c_3}{n(r)}\sqrt{1-\left[\frac{m}{krL(r)}\right]^2}\sin\alpha,\quad K^0_\varphi=-\sqrt{1-\left[\frac{m}{krL(r)}\right]^2}\cos\alpha+\frac{m}{krn(r)L(r)}\sin\alpha,$$

$$K^0_z=-\frac{L(r)}{n(r)}\sin\alpha,\quad K^{\frac{\pi}{2}}_{r,\varphi,z}=K^{0}_{r,\varphi,z}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\quad \mathcal{X}(\xi_1)=\xi_1^{1/2}\left[1-\left(\frac{m}{k\xi_1}\right)^2\right]^{1/4}.$$

Амплитуды (7) не содержат расходимостей на каустике $r=r_k$.

В соответствии с конструкцией (2) равномерные асимптотические выражения для "H"-типов волн в волноводе с аксиально-симметричным заполнением (I) приобретают вид:

$$E_{Hr}=\frac{c}{L(r)}\sqrt{\frac{\xi_1}{r}\frac{dr}{d\xi_1}}\left\{\sqrt{\mu(r)}\,\frac{m}{kr}\cos\alpha+\frac{C_3}{\sqrt{\varepsilon(r)}}\sqrt{L^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2}\sin\alpha\right\}J_m(k\xi_1)e^{im\varphi+ikC_3z},$$

$$E_{H\varphi}=\frac{ic}{L(r)}\sqrt{\frac{\xi_1}{r}\frac{d\xi_1}{dr}}\left\{\sqrt{\mu(r)}\cos\alpha-\frac{C_3}{\sqrt{\varepsilon(r)}}\frac{m}{kr}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{L^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2}}\right\}J_m(k\xi_1)e^{im\varphi+ikC_3z},$$

$$E_{Hz}=icL(r)\sqrt{\frac{\xi_1}{r\varepsilon(r)}\frac{d\xi_1}{dr}}\;\frac{\sin\alpha}{\sqrt{L^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2}}J_m'(k\xi_1)e^{im\varphi+ikC_3z},$$

$$(8)$$

$$H_{Hr}=-\frac{ic}{L(r)}\sqrt{\frac{\xi_1}{r}\frac{d\xi_1}{dr}}\left\{\frac{C_3}{\sqrt{\mu(r)}}\cos\alpha-\sqrt{\varepsilon(r)}\frac{m}{kr}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{L^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2}}\right\}J_m'(k\xi_1)e^{im\varphi+ikC_3z},$$

$$H_{H\varphi}=\frac{c}{L(r)}\sqrt{\frac{\xi_1}{r}\frac{dr}{d\xi_1}}\left\{\frac{C_3}{\sqrt{\mu(r)}}\frac{m}{kr}\cos\alpha+\sqrt{\varepsilon(r)}\sqrt{L^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2}\sin\alpha\right\}J_m(k\xi_1)e^{im\varphi+ikC_3z}$$

$$H_{Hz}=-cL(r)\sqrt{\frac{\xi_1}{r\mu(r)}\frac{dr}{d\xi_1}}\cos\alpha\, J_m(k\xi_1)e^{im\varphi+ikC_3z}\quad (c=\mathrm{const}).$$

Выражения для "E"-типов волн получаются из (8) заменами $\vec{E}\to\vec{H}$, $\vec{H}\to-\vec{E}$ и $\varepsilon(r)\rightleftarrows\mu(r)$. Все эти выражения конечны на каустиках, если учесть, что на каустике $\alpha=0$. В (8) связь между координатами ξ_1 и r задается уравнением (6), а константа C_3 определяется из граничных условий на стенке волновода

$$E_\varphi=E_z=0 \qquad \text{при} \qquad r=a, \qquad (9)$$

где a – радиус волновода. Этим условиям для "электрических типов волн соответствует уравнение $J_m(k\xi_1)=0$ при $r=a$, а для "магнитных" типов – $\frac{dJ_m(k\xi_1)}{d\xi_1}=0$ при $r=a$. Пусть χ_{nm} – n-й корень уравнения $J_m(\chi_{nm})=0$. Тогда константа C_3 определяется из уравнения (6):

$$\sqrt{\chi_{nm}^2-m^2}-m\arccos\frac{m}{\chi_{nm}}=k\int_{r_k}^{a}\sqrt{n^2(r)-\left(\frac{m}{kr}\right)^2-C_3^2}\,dr. \qquad (10)$$

Для "магнитных" типов волн эта константа определится из такого же уравнения, если в нем вместо χ_{nm} подставить $\hat{\chi}_{nm}$ – корень уравнения $J_m'(\hat{\chi}_{nm})=0$.

С учетом (10) полученные выражения для полей могут быть трактованы как коротковолновая асимптотика собственных электромагнитных колебаний в радиально-неоднородном цилиндрическом волноводе с идеально-проводящими стенками.

Выражения (8) и полученные из них заменами $\vec{E}\to\vec{H}$, $\vec{H}\to-\vec{E}$ и $\varepsilon\leftrightarrow\mu$ при $\varepsilon=\mathrm{const}$ и $\mu=\mathrm{const}$ переходят в известные точные выражения для полей E- и H-типов волн регулярного идеально-проводящего цилиндрического волновода [7]. Именно этим были мотивированы названия "E"- и "H"- типов волн, приписанные нами к гибридным волнам (см. (8)).

В конце рассмотрим каустические поверхности для трех моделей заполняющей среды: $n_1^2(r)=1+\delta r^2$, $n_{2,3}^2(r)=n^2\pm\frac{\delta^2}{k^2r^2}$. Из уравнения (5) имеем следующие выражения для радиусов цилиндрических каустических поверхностей:

$$r_{k1}=\left[\frac{-(1-C_3)+\sqrt{(1-C_3)^2+4\delta\frac{m^2}{k^2}}}{2\delta}\right]^{1/2},\qquad r_{k2,3}=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{m^2\pm\delta^2}{n^2-C_3^2}}. \qquad (11)$$

При $\delta\to0$ во всех трех случаях получается выражение для радиусов каустик волновода с однородным заполнением:

$$r_k=\frac{ma}{\chi_{nm}} \qquad (12)$$

Из (11) следует также, что при определенных условиях каустика может стать мнимой, т.е. быть расположенной вне волновода.

При $\delta = \kappa^2$, $n = c_3^{\cdot}$, когда $c_3 > 1$ ($n > 1$) в выражениях (8) наблюдается расходимость. Эта расходимость устраняется добавлением малой мнимой части в выражение для показателя преломления среды [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Газазян Э.Д., Иванян М.И. Равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Гельмгольца и Максвелла. Радиотехника и электроника, 1984, т.29, № 5, с.830-835.
2. Адамс Н. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
3. Унгер Х. Планарные и волоконные оптические волноводы. М.: Мир, 1980.
4. Андрюшко Л.М. Диэлектрические неоднородные волноводы оптического диапазона. Киев, Техника, 1983.
5. Содха М.С., Гхатак А.К. Неоднородные оптические волноводы. М.: Связь, 1980.
6. Газазян Э.Д., Тер-Погосян А.Д. Описание полей осесимметричных пучков электромагнитных волн вблизи каустической поверхности в неоднородной диэлектрической среде. Изв. АН АрмССР, Физика, 1974, т.9, вып.2, с.169-172.
7. Справочник по волноводам /Под ред. проф. Я.Н.Фельда. М.: Сов.радио, 1952.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

Рукопись поступила 18 апреля 1986 г.

Э.Д.ГАЗАЗЯН, М.И.ИВАНЯН, А.Д.ТЕР-ПОГОСЯН

РАВНОМЕРНАЯ КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КРУГЛОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 11/VI-86г. ВФ-05569 Формат 60x84/16
Офсетная печать. Уч.изд.л.0,5 Тираж 299 экз.Ц.7 к.
Зак.тип.356 Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна 2