индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-887(38)-86

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Э.Д.ГАЗАЗЯН, М.И.ИВАНЯН,
А.Д.ТЕР-ПОГОСЯН

О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ТОРОИДАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

ЦНИИатоминформ

ЕРЕВАН-1986

Նախնատիպ ԵФИ-887(38)-86

ԳԱԶԱԶՅԱՆ Է.Դ., ԻՎԱՆՅԱՆ Մ.Ի., ՏԵՐ-ՊՈՂՈՍՅԱՆ Ա.Դ.

ՏՈՐԱՁԵՎ ԱՐՁԱԳԱՆՔԻՉՆԵՐՈՒՄ ՍԵՓԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Կառուցված է սեփական էլեկտրամագնիսական տատանումների կարճալիքային ասիմպտոտը տորաձև արձագանքիչներում/ռեզոնատորներում/՝ դատարկ մեծ տորոիդի դաշտը մոտարկող անհամասեռ լցումով: Համեմատություն է արված գրեթե տորոիդալ կոորդինատային համակարգում ստացված համասեռ տորոիդալ մոդերի արտահայտությունների հետ:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1986

Preprint ЕФИ-887(38)-86

E.D. Gazazyan, M.I. Ivanyan, A.D. Ter-Pogossyan

ON THE INHERENT ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS IN A TOROIDAL RESONATOR

The short-wave asymptotics of the inherent electromagnetic oscillations in a toroidal resonator with inhomogeneous medium approximating a large hollow toroid field is constructed. The results are compared with the expressions for the homogeneous toroidal modes obtained in a quasi-toroidal coordinate system.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1986

Препринт ЕФИ-887(38)-86

УДК 621.372

Э.Д.ГАЗАЗЯН,М.И.ИВАНЯН,А.Д.ТЕР-ПОГОСЯН

О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ТОРОИДАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Построена коротковолновая асимптотика собственных электромагнитных колебаний в тороидальном резонаторе с неоднородным заполнением, аппроксимирующим поля большого полого тороида. Проведено сравнение с выражениями однородных тороидальных мод, полученными в квазитороидальной системе координат.

Ереванский физический институт
Ереван 1986

В классической тороидальной системе координат переменные разделяются лишь в уравнении Лапласа, и уже в уравнении Гельмгольца возможно лишь частичное их разделение [1,2] . Результаты , полученные в [3,4] не представляются достоверными. В частности , как указывают авторы [5] , где задача для однородных тороидальных мод корректно решалась методом теории возмущений, их результаты не совпадают с соответствующими результатами [3,4] .

В настоящей работе разделение переменных в уравнении Гельмгольца достигается искусственным путем, а именно, внесением в тороид соответствующего неоднородного заполнения. Анализируя при этом физическое содержание внесенной неоднородности, можно судить о собственных колебаниях полого тороида.

В квазитороидальной системе координат [3-5] асимптотика собственных однородных тороидальных мод (азимутальное число $m = 0$) полого тороида получается в силу разделения переменных в уравнении эйконала.

Тороидальный резонатор с неоднородным заполнением

Тороидальные координаты τ , σ , φ связаны с декартовыми координатами x, y, z посредством соотношений [1,2]:

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma}\cos\varphi,\qquad y=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma}\sin\varphi,\qquad z=\frac{a\sin\sigma}{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma},\tag{1}$$

где a – постоянная, характеризующая тороидальную систему. Координаты τ, σ, φ меняются в пределах: $0\le\tau\le\infty$, $-\pi\le\sigma\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Решение уравнения Гельмгольца, когда среда, заполняющая тороид, характеризуется коэффициентом преломления $\sqrt{\varepsilon}=\frac{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma}{\mathrm{sh}\,\tau}$ (μ = 1), записывается в виде:

$$U=\sin\frac{\sigma}{2}\sqrt{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma}\,f_1(\tau)\,f_2(\sigma)\,f_3(\varphi),\tag{2}$$

где функции $f_1(\tau)$, $f_2(\sigma)$, $f_3(\varphi)=\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям типа

$$\frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2}+\alpha(\xi)\frac{df(\xi)}{d\xi}+k^2\beta(\xi)f(\xi)=0\tag{3}$$

при

$$\xi=\tau;\quad \alpha(\tau)=\mathrm{cth}\,\tau,\quad \beta(\tau)=\frac{1}{4k^2}-\frac{c_2}{k^2}-\frac{c_1}{k^2\,\mathrm{sh}^2\tau};\tag{4а}$$

$$\xi=\sigma;\quad \alpha(\sigma)=\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2},\quad \beta(\sigma)=\frac{c_2}{k^2}-\frac{1}{4k^2};\tag{4б}$$

$$\xi=\varphi;\quad \alpha(\varphi)=0,\quad \beta(\varphi)=a^2+\frac{c_1}{k^2}=\frac{m^2}{k^2};\tag{4в}$$

m = 0,1,2...; c_1 и c_2 – константы разделения. Уравнению (3) с выражениями для $\alpha(\sigma)$ и $\beta(\sigma)$ из (4б) удовлетворяют многочлены Гегенбауэра (ультрасферические функции). Сообразуясь с условием непрерывности поля по σ и свойствами многочленов Гегенбауэра [2], заключаем, что $f_2(\sigma)=C^1_{2n-1}(\cos\frac{\sigma}{2})$, т.е. $c_2=n^2$, n = 1,2... Тогда решениями уравнения (3) с выраже-

ниями для $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ из (4а) будут присоединенные функции Лежандра порядка $n-1/2$ и степени $\sqrt{c_1}=\sqrt{m^2-k^2a^2}$ – $P^{\sqrt{m^2-k^2a^2}}_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\tau)$ (функции тора). Имея набор функций $f_1(\tau)=P^{\sqrt{m^2-k^2a^2}}_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\tau)$, $f_2(\sigma)=C^1_{2n-1}(\cos\frac{\sigma}{2})$, $f_3(\varphi)=\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$, решающих задачу в скалярном уравнении Гельмгольца, можно построить равномерные асимптотические решения уравнений Максвелла [6] для E-типов волн ($H_\varphi=0$) в тороидальном резонаторе с указанной неоднородностью:

$$E_\varphi=-c\left(1-\frac{m^2}{k^2a^2}\right)^{1/2}\sin\frac{\sigma}{2}(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)^{1/2}f_1(\tau)f_2(\sigma)f_3(\varphi),$$

$$E_\sigma=-\frac{c}{(ka)^2}\left(1-\frac{m^2}{k^2a^2}\right)^{1/2}\mathrm{sh}\,\tau\sin\frac{\sigma}{2}(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)^{1/2}f_1(\tau)\frac{df_2(\sigma)}{d\sigma}\frac{df_3(\varphi)}{d\varphi},$$

$$E_\tau=-\frac{c}{(ka)^2}\left(1-\frac{m^2}{k^2a^2}\right)^{1/2}\mathrm{sh}\,\tau\sin\frac{\sigma}{2}(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)^{1/2}\frac{df_1(\tau)}{d\tau}f_2(\sigma)\frac{df_3(\varphi)}{d\varphi},\tag{5}$$

$$H_\sigma=-\frac{ic}{ka}\left(1-\frac{m^2}{k^2a^2}\right)^{1/2}\sin\frac{\sigma}{2}(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)^{3/2}\frac{df_1(\tau)}{d\tau}f_2(\sigma)f_3(\varphi),$$

$$H_\tau=\frac{ic}{ka}\left(1-\frac{m^2}{k^2a^2}\right)^{1/2}\sin\frac{\sigma}{2}(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)^{3/2}f_1(\tau)\frac{df_2(\sigma)}{d\sigma}f_3(\varphi),$$

где c – произвольная постоянная. Выражения для H-типов волн (E_φ = 0) получаются из (5) путем замены в них $\vec{E}\to\vec{H}/\sqrt{\varepsilon}$, $\vec{H}\to-\sqrt{\varepsilon}\vec{E}$. В тороидальном резонаторе $\tau=\tau_1$ с идеально проводящими стенками должно удовлетворяться граничное условие для E- (H-) типа волн:

$$P^{\sqrt{m^2-k^2a^2}}_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\tau)=0\quad\left(\frac{dP^{\sqrt{m^2-k^2a^2}}_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\tau)}{d\tau}=0\right)\quad \text{при } \tau=\tau_1\tag{6}$$

Однородные тороидальные моды в полом тороиде

В "квазитороидальной" системе координат τ, θ, φ, связанных с декартовыми x, y, z соотношениями [3-5]:

$$x = Rh\cos\varphi,\quad y = Rh\sin\varphi,\quad z = R\rho\sin\theta,\quad h = 1-\rho\cos\theta,\quad \rho = r/R$$

$$(0 \leqslant r \leqslant R,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \tag{7}$$

где R – радиус осевой окружности тора (главный радиус) и r – радиус окружности в поперечном сечении тора (малый радиус), уравнение эйконала записывается в виде

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{R^2h^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)^2 = 1\,. \tag{8}$$

В уравнении (8) переменные разделяются, когда $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = 0$, что соответствует однородным тороидальным модам с $m = 0$, если учесть, что зависимость от координаты φ задается функцией $e^{im\varphi}$. Представляя функцию $\Psi(r,\theta,\varphi)$ в виде $\Psi_1(r) + \Psi_2(\theta) + \Psi_3(\varphi)$, из (8) с учетом условия $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = 0$ имеем:

$$\Psi_{1\ell} = (-1)^{P_\ell} r\left[\sqrt{1-\frac{n^2}{\kappa^2 r^2}} - \frac{n}{\kappa r}\arccos\frac{n}{\kappa r}\right] - \frac{\pi}{4\kappa},\quad \Psi_{2\ell} = (-1)^{P_\ell}\frac{n}{\kappa};\quad \ell = 1,2 \tag{9}$$

В (9) P_1 и P_2 принимают значения 0 и I, а фазовая добавка обусловлена наличием каустики при $\beta(r) = 0$ [7].

Запишем теперь уравнение переноса для геометрооптического поля [6] $U = A_0\sum\limits_{\ell=1,2}\exp\left\{i\kappa\left[(-1)^{P_\ell}\Psi_\ell - \frac{\pi}{4\kappa}\right]\right\}$, в котором эйконал $\Psi_\ell = \Psi_{1\ell} + \Psi_{2\ell}$ определен, согласно (8),(9):

$$(-1)^{P_1} Rh\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1-\frac{n^2}{\kappa^2 r^2}}\,A_0^2 + (-1)^{P_2}\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}hA_0^2 = 0, \tag{10}$$

Решив уравнение (I0), учитывая (8) и (9), получим:

$$U = \frac{c\cos\left[\kappa r\sqrt{1-\frac{n^2}{\kappa^2 r^2}} - n\arccos\frac{n}{\kappa r} - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{r^2-\frac{n^2}{\kappa^2}}\;\sqrt{R - r\cos\theta}}\,e^{\pm in\theta} \tag{11}$$

Если в (II) вместо дебаевской асимптотики восстановить функцию Бесселя первого рода $J_n(\kappa r)$, равномерное асимптотическое решение скалярной задачи запишется в виде:

$$U = c\,\frac{J_n(\kappa r)}{\sqrt{R(1-\rho\cos\theta)}}\,e^{\pm in\theta}. \tag{12}$$

Имея набор функций $f_1(r) = J_n(\kappa r)$, $f_2(\theta) = e^{in\theta}$, $f_3(\varphi) = const$, удовлетворяющих уравнениям типа (3) с $\alpha_1(r) = \frac{1}{r}$, $\beta(r) = 1 - \frac{n^2}{\kappa^2 r^2}$ при $\xi = r$ и $\alpha_2(\theta) = 0$, $\beta_2(\theta) = \frac{n^2}{\kappa^2}$ при $\xi = 0$, методом, развитым в [6], построим коротковолновую асимптотику однородных электромагнитных мод в полом тороиде, например, для H-типов волн:

$$E_r = -H_\varphi = -c\,\frac{J_n(\kappa r)e^{in\theta}}{\sqrt{R(1-\rho\cos\theta)}},\qquad E_\theta = -ic\,\frac{J_n'(\kappa r)e^{in\theta}}{\sqrt{R(1-\rho\cos\theta)}}\,. \tag{13}$$

Выражения для E-типов волн получаются из (I3) заменами $\vec{E} \to \vec{H}$, $\vec{H} \to -\vec{E}$. Граничное условие для E- (H-) типа волн на стенках тороида $r = r_0$ имеет вид:

$$J_n(\kappa r) = 0 \qquad \left(\frac{dJ_n(\kappa r)}{dr} = 0\right) \qquad \text{при } r = r_0 \tag{14}$$

Геометрооптическое рассмотрение и сравнение результатов

В неоднородном тороиде $\tau = \tau_1$ уравнение $\beta(\tau) = 0$ описывает каустическую поверхность

$$\tilde{\tau} = \operatorname{arc\,Sh}\sqrt{\frac{(\kappa a)^2 - m^2}{n^2 - 1/4}}\,, \tag{15}$$

несоосную исходному тору. Она расположена внутри тора $\tau = \tau_1$, если $\tilde{\tau} > \tau_1$ (малый радиус тора $z_\tau = \frac{a}{sh\,\tau_1}$). Однородные тороидальные моды образуют каустическую поверхность в виде тороида с радиусом

$$\tilde{z}_\kappa = \frac{n}{\kappa}\sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}} . \qquad (16)$$

Граничные условия (7), записанные для дебаевских (квазиклассических) [7] асимптотик функций тора, после проведения интегрирования и последующего разложения в ряд Тейлора по малому параметру $\frac{z}{R}$ приводят к следующим "квантовым условиям" для однородных тороидальных мод:

$$\kappa z_0\left[\sqrt{1 - \frac{n^2 - 1/4}{\kappa^2 z_0^2}} - \frac{\sqrt{n^2 - 1/4}}{\kappa z_0}\arccos\frac{\sqrt{n^2 - 1/4}}{\kappa z_0}\right] = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + 2N + 1\right) - & \text{Е-тип,} \\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + 2N\right) - & \text{Н-тип.} \end{cases} \qquad (17)$$

Каустическая поверхность, соответствующая полям (13), описывается уравнением $\beta(z) = 1 - \frac{n^2}{\kappa^2 z^2} = 0$, т.е.

$$z_\kappa = \frac{n}{\kappa}, \qquad (18)$$

а соответствующие квантовые условия совпадают с (17), если в них произвести замену $\sqrt{n^2 - 1/4} \to n$. Таким образом, для достаточно больших тороидов асимптотика однородных тороидальных мод электромагнитных колебаний в тороиде с рассмотренным выше неоднородным заполнением хорошо согласуется с асимптотикой этих колебаний в полом тороиде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морс Ф.М.,Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1958, т.I.
2. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган М.: Наука,1979.
3. Cap F. and Deutch R. Torodial Resonators for Electromagnetic Waves. IEEE Trans, 1978, MTT-26, N.7, p.478-486.
4. Cap F. and Deutch R. Toroidal Resonators for Electromagnetic Waves. II. IEEE Trans., 1980, MTT-28, N.7, p.700-703.
5. Lileg T., Shnizer B., Keil R. Perturbation Theory Computation of Toroidal Uniform Modes Within Empty Torus. -AEU, 1983, 37, p.359-365.
6. Газазян Э.Д.,Иванян М.И. Равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Гельмгольца и Максвелла. Радиотехника и электроника, 1984, т.29, № 5, с.830-835.
7. Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука,1974.

Рукопись поступила 18 апреля 1986 г.

Э.Д.ГАЗАЗЯН,М.И.ИВАНЯН,А.Д.ТЕР-ПОГОСЯН

О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ТОРОИДАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать II/УI-86г. ВФ-05564 Формат 60x84/I6
Офсетная печать.Уч.изд.л. 0,5 Тираж 299 экз. Ц.
Зак.тип.359 Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна 2