Препринт ЕФИ-894(45)-86

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.М.ЦАКАНОВ

МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

ЦНИИатоминформ

ЕРЕВАН-1986

Նախնատիպ ԵՖԻ-894(45)-86

Վ.Մ. ՑԱՔԱՆՈՎ

ԴԱՆԴԱՂ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒՅԹՈՎ ԱԼԻՔԱՏԱՐՈՒՄ

Աշխատանքում ստացված է տարաբաժան հավասարում $E_{11,c}$ ալիքի մշտական տարածման որոշման համար՝ էլիպսական հատույթի դիաֆրագմացված ալիքատարում: Հաշվումները կատարված են դանդաղ ալիքներ ստանալու նպատակով, որոնք թույլ են տալիս արագացնել մասնիկները էլիպսի կիզակետերից մեկում:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1986

Preprint ЕФИ-894(45)-86

V.M. Tsakanov

SLOW WAVES IN A WAVEGUIDE WITH ELLIPTICAL CROSS SECTION

In this work a dispersion equation is obtained for determination of propagation constant of $E_{11,C}$ wave in a diaphragmed waveguide with an elliptical cross section. Calculations are made to obtain slow waves able to accelerate particles in one of the ellipse foci.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1986

Препринт ЕФИ-894(45)-86

В.М.ЦАКАНОВ

МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

В работе получено дисперсионное уравнение для определения постоянной распространения волны $E_{11,c}$ в диафрагмированном волноводе эллиптического сечения. Расчеты проведены с целью получения медленной волны, позволяющей ускорять частицы в одном из фокусов эллипса.

Ереванский физический институт

Ереван 1986

Введение

В последнее время в связи с возможностью ускорения кильватерными полями в замедляющих системах возрос интерес к диафрагмированным волноводам эллиптического сечения [I] . В этом смысле определенный интерес представляет исследование свойств несимметричной волны $E_{II,c}$, тормозящее и ускоряющее продольное электрическое поле E_z которой разделено в плоскости поперечного сечения, что позволяет разделить траектории ускоряющего и ускоряемого сгустков. В настоящей работе получено дисперсионное уравнение этой моды волны для определения постоянной распространения основной гармоники.

На рис.I приведены продольное и поперечное сечения такого волновода, где e_1 - есть эксцентриситет внешнего эллипса, e_0 - эксцентриситет внутреннего эллипса. Задача исследования свойств электрических волн ($E_z \neq 0$, $H_z = 0$) в такой структуре сводится к решению уравнений Максвелла с потенциалом поля E_z , удовлетворяющим граничным условиям равенства нулю тангенциальной составляющей E_τ [2] . В эллиптических координатах (ξ ,

η) граничные условия для таких типов волн имеют вид ($ch\xi_0 = e_0^{-1}$):

$$E_z \Big|_{\xi=\xi_1} = 0 \ , \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_{z=\pm\frac{d}{2}} = 0 \ , \quad E_z \Big|_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \frac{d}{2}<z<\frac{\mathcal{D}}{2}}} = 0 \ . \qquad (1)$$

Задачу будем решать методом частичных областей. Разбив внутренность волновода на области I и П, находим в общем виде решения в каждой области и затем сшиваем тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей на границе $\xi = \xi_0$. В области I наша задача удовлетворяет условию Флоке периодичности структуры по z . Воспользовавшись теоремой Флоке, поле E_z в области I представляем в виде

$$E_z = U(\xi, \eta, z)\, e^{-\beta_0 i z} \ , \qquad (2)$$

где β_0 - есть набег фазы на период $\mathcal{D}$, U - периодическая функция по z . Разложив в ряд Фурье функцию $U(\xi,\eta,z)$ по z , для E_z в области I в общем виде получим

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n' \, Ce_1(q_n,\xi)\, ce_1(q_n,\eta)\, e^{-i(\beta_0 + \frac{2\pi n}{\mathcal{D}})z} \ , \qquad (3)$$

где ce_1 , Ce_1 - есть угловая и модифицированная функции Матье [3] , $q_n = (K^2-\beta_n^2)\frac{C\varphi^2}{4}$, $K = \frac{\omega}{c}/\mu\varepsilon$, $C\varphi$ - фокусное расстояние эллипса, ω - частота, c - скорость света, ε , μ - электрическая и магнитная проницаемости.

В области П общее решение находим из условия удовлетворения граничных условий (I) на стенках диафрагм и внешнего эллипса. В общем виде это решение имеет вид

$$E_z=\sum_{s=0}^{\infty} B'_s\, ce_1(q_s^{(1)},\eta)\,\varphi_1(\xi)\cos\frac{2\pi s}{d}z+\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{D}'_s\, ce_1(q_s^{(2)},\eta)\,\varphi_2(\xi)\sin\frac{2s-1}{d}\pi z \tag{4}$$

при $-\frac{d}{2}<z<d/2$

и $E_z=0$, при $\frac{d}{2}<z<\frac{\mathcal{D}}{2}$,

где $q_s^{(1)}=\left(\kappa^2-\left(\frac{2\pi s}{d}\right)^2\right)\frac{C\varphi^2}{4}$, $q_s^{(2)}=\left(\kappa^2-\frac{(2s-1)^2}{d^2}\pi^2\right)\frac{C\varphi^2}{4}$,

а функции $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$, включающие функции Матье второго рода, приведены в приложении. Воспользовавшись уравнениями Максвелла для составляющих полей на границе областей I и П ($\xi=\xi_0$), получим, заменив

$$A_n=A'_n\, Ce_1(q_n,\xi_0)\ ,\quad B_s=B'_s\,\varphi_1(\xi_0)\ ,\quad \mathcal{D}_s=\mathcal{D}'_s\,\varphi_2(\xi_0),$$

в области I:

$$E_z^{I}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\, Ce_1(q_n,\eta)\,e^{-i\beta_n z}\ ,$$

$$E_\eta^{I}=\frac{i}{\ell_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\,\frac{\beta_n\, ce'_1(q_n,\eta)}{\beta_n^2-\kappa^2}\,e^{-i\beta_n z}, \tag{5}$$

$$H_\eta^{I}=\frac{i\kappa}{\ell_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_n\,P_n}{\beta_n^2-\kappa^2}\,ce_1(q_n,\eta)\,e^{-i\beta_n z}\ ;$$

в области П :

$$E_z^{II}=\sum_{s=0}^{\infty}B_s\, ce_1(q_s^{(1)},\eta)\cos\frac{2\pi s}{d}z+\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{D}_s\, ce_1(q_s^{(2)},\eta)\sin\frac{2s-1}{d}\pi z\ ,$$

$$E_\eta^{II}=\frac{1}{\ell_1}\sum_{s=1}^{\infty}B_s\,\frac{\frac{2\pi s}{d}\,ce'_1(q_s^{(1)},\eta)}{\kappa^2-\frac{4\pi^2 s^2}{d^2}}\sin\frac{2\pi s}{d}z+\frac{1}{\ell_1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mathcal{D}_s\frac{(2s-1)\pi}{d}\,ce'_1(q_s^{(2)},\eta)}{\kappa^2-\frac{(2s-1)^2}{d^2}\pi^2}\cos\frac{(2s-1)}{d}\pi z, \tag{6}$$

$$H_\eta^{II}=\frac{i\kappa}{\ell_1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s F_1\, ce_1(q_s^{(1)},\eta)}{\kappa^2-\frac{4\pi^2 s^2}{d^2}}\cos\frac{2\pi s}{d}z+\frac{i\kappa}{\ell_1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mathcal{D}_s F_2\, ce_1(q_s^{(2)},\eta)}{\kappa^2-\frac{\pi^2(2s-1)^2}{d^2}}\sin\frac{2s-1}{d}\pi z,$$

где P_n, F_1, F_2, ℓ_1 приведены в приложении.

На границе $\xi = \xi_0$ должна иметь место непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, т.е.

$$E_z^{I} = E_z^{II}, \quad E_\eta^{I} = E_\eta^{II}, \quad H_\eta^{I} = H_\eta^{II}. \tag{7}$$

Для сшивания разлагаем функции области I, зависящие от η и z по аналогичным функциям в области II. В частности, для E_z: умножаем E_z^{I} и E_z^{II} на $ce_1(q_s^{(1)},\eta)\cos\frac{2\pi s}{d}z$ и интегрируем в пределах $\eta(0, 2\pi)$, $z(-\frac{\mathcal{D}}{2}, \frac{\mathcal{D}}{2})$, затем умножаем на $ce_1(q_s^{(2)},\eta)\sin\frac{2s-1}{d}\pi z$ и интегрируем в тех же пределах. В результате для коэффициентов разложения получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Z_{ns}^{(1)} C_{ns} = \frac{\pi d}{2} B_s, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Z_{ns}^{(2)} S_{ns} = \frac{\pi d}{2} \mathcal{D}_s, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Z_{n0}^{(1)} C_{n0} = \pi d B_0 .\end{gathered} \tag{8}$$

Поступая аналогичным образом, при сшивании E_η и H_η получим для E_η:

$$\begin{gathered}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n \beta_n Q_{ns}^{(1)}}{\beta_n^2 - K^2} \bar{S}_{ns} = -\frac{2s I_s^{(1)}}{i\left(K^2 - \frac{4\pi^2 s^2}{d^2}\right)d} \cdot \frac{\pi d}{2} B_s, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n \beta_n Q_{ns}^{(2)}}{\beta_n^2 - K^2} \bar{C}_{ns} = \frac{(2s-1) I_s^{(2)}}{i\left(K^2 - \frac{(2s-1)^2 \pi^2}{d^2}\right)d} \cdot \frac{\pi d}{2} \mathcal{D}_s,\end{gathered} \tag{9}$$

для H_η:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n P_n Z_{ns}^{(1)} C_{ns}' = \frac{F_1}{\frac{4n^2s^2}{d^2}-K^2} \cdot \frac{\pi d}{2} B_s ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n P_n Z_{ns}^{(2)} S_{ns}' = \frac{F_2}{\frac{4n^2s^2}{d^2}-K^2} \cdot \frac{\pi d}{2} \mathcal{D}_s , \qquad (10)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n P_n Z_{n0}^{(1)} S_{n0}' = -\frac{F_1}{K^2} \pi d B_0 .$$

Исключая из уравнений (8,9,10) B_s и $\mathcal{D}_s$, окончательно получаем следующую бесконечную систему однородных линейных уравнений относительно коэффициентов A_n :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Z_{ns}^{(1)} \left(\frac{F_1}{\gamma_s^{(1)}} C_{ns} - \frac{P_n}{\alpha_n} C_{ns}' \right) = 0 , \qquad s = 0,1,2,3\dots$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Z_{ns}^{(2)} \left(\frac{F_2}{\gamma_s^{(2)}} S_{ns} - \frac{P_n}{\alpha_n} S_{ns}' \right) = 0 , \qquad s = 1,2,3\dots \qquad (11)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left(\frac{2s I_s^{(1)}}{\gamma_s^{(1)}} Z_{ns}^{(1)} C_{ns} - \frac{i d\beta_n}{\alpha_n} Q_{ns}^{(1)} \bar{S}_{ns} \right) = 0 , \qquad s = 1,2,3\dots$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left(\frac{(2s-1) I_s^{(2)}}{\gamma_s^{(2)}} Z_{ns}^{(2)} S_{ns} + \frac{i d\beta_n}{\alpha_n} Q_{ns}^{(2)} \bar{C}_{ns} \right) = 0 . \qquad s = 1,2,3\dots$$

Выражения для коэффициентов γ_s, α_n Z_{ns}, C_{ns}, S_{ns}, I_s приведены в приложении . Написав систему (11) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{nsi} A_n = 0 , \qquad s = 0,1,2,3\dots \quad i = 1,2,3,4 \qquad (12)$$

видим, что для существования ненулевого решения для коэффициентов A_n , необходимо, чтобы детерминант системы равнялся нулю. Легко видеть, что условие равенства детерминанта нулю является дисперсионным соотношением для определения постоянной распространения. Для проведения конечного расчета необходимо ограничиться конечным числом уравнений системы. Для учета четырех условий (II) (i = I,2,3,4) должно выполняться условие:

$$N = 4 \cdot S - 1 \qquad \begin{array}{l} n = 1,2 \dots N \\ s = 1,2 \dots S \end{array} \tag{I3}$$

В нулевом приближении по пространственным гармоникам (S = 0, i = I, n = 0) получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$(K^2-\beta_0^2)\frac{Ce_1(q_0,\xi_0)}{Ce_1'(q_0,\xi_0)} = K^2\,\frac{Fe_1(q,\xi_1)\,Ce_1(q,\xi_0)-Ce_1(q,\xi_1)\,Fe_1(q,\xi_0)}{Fe_1(q,\xi_1)\,Ce_1'(q,\xi_0)-Ce_1(q,\xi_1)\,Fe_1'(q,\xi_0)}, \tag{I4}$$

где $q_0=(K^2-\beta_0^2)\frac{C_\varphi^2}{4}$, $q = K^2\frac{C_\varphi^2}{4}$, а Fe - есть модифицированная функция Матье П-го рода. Легко видеть, что в предельном случае круглого поперечного сечения ($C_\varphi \to 0$) условие (I4) переходит в известное дисперсионное соотношение для круглого волновода.

На рис.2 приведен график зависимости волнового числа K от набега фазы на период структуры $\theta = \beta_0 \cdot \mathcal{D}$ при различных значениях эксцентриситета внутреннего эллипса. Расчет проводился при следующих размерах волновода: $\mathcal{D}$ = 2,5 см, d = 2 см, e_1 = 0,5 , C_φ = 4 см. Пунктирная линия соответствует условию равенства фазовой скорости волны (v_φ) скорости света. Жирная линия соответствует дисперсионному соотношению гладкого эллиптического волновода. Как видно из графика, в предельном случае $e_0 \to e_1$ зависимость $K(\theta)$ совпадает со случаем гладкого волновода. С увеличением e_0 в структуре возможно распространение медленных волн с $v_\varphi < c$.

В заключение автор выражает благодарность Лазиеву Э.М. за постоянный интерес к работе.

Приложение

$$\gamma_s^{(1)} = K^2 - \frac{4\pi^2 s^2}{d^2} \quad , \quad \gamma_s^{(2)} = K^2 - \frac{\pi^2 (2s-1)^2}{d^2}$$

$$\alpha_n = K^2 - \beta_n^2 \quad , \quad \ell_1 = c\varphi \left[\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \right]^{1/2}$$

$$I_s^{(m)} = \int_0^{2\pi} ce_1'^2 (q_s^{(m)}, \eta)\, d\eta \qquad m = 1, 2 .$$

$$Z_{ns}^{(m)} = \int_0^{2\pi} ce_1(q_n, \eta)\, ce_1(q_s^{(m)}, \eta)\, d\eta$$

$$Q_{ns}^{(m)} = \int_0^{2\pi} ce_1'(q_n, \eta)\, ce_1'(q_s^{(m)}, \eta)\, d\eta$$

$$\Phi_m(\xi) = Fe_1(q_s^{(m)}, \xi_1)\, Ce_1(q_s^{(m)}, \xi) - ce_1(q_s^{(m)}, \xi_1)\, Fe_1(q_s^{(m)}, \xi)$$

$$F_m = \Phi_m'(\xi_0) / \Phi_m(\xi_0) \quad , \quad P_n = Ce_1'(q_n, \xi_0) / Ce_1(q_n, \xi_0)$$

$$C_{ns} = \mathcal{D} \left[\frac{\sin \frac{\mathcal{D}}{2} \left(\beta_n + \frac{2\pi s}{d} \right)}{\left(\beta_n + \frac{2\pi s}{d} \right) \mathcal{D}} - \frac{\sin \frac{\mathcal{D}}{2} \left(\beta_n - \frac{2\pi s}{d} \right)}{\left(\beta_n - \frac{2\pi s}{d} \right) \mathcal{D}} \right]$$

$$S_{ns} = i\mathcal{D} \left[\frac{\sin \frac{\mathcal{D}}{2} \left(\beta_n + \frac{(2s-1)}{d} \pi \right)}{\left(\beta_n + \frac{2s-1}{d} \pi \right) \mathcal{D}} - \frac{\sin \frac{\mathcal{D}}{2} \left(\beta_n - \frac{2s-1}{d} \pi \right)}{\left(\beta_n - \frac{2s-1}{d} \pi \right) \mathcal{D}} \right]$$

$$C_{ns}' = C_{ns} (\mathcal{D} \to d) \quad , \quad S_{ns}' = S_{ns} (\mathcal{D} \to d)$$

$$\bar{C}_{ns} = C_{ns} (2s \to 2s-1) \, , \quad \bar{S}_{ns} = S_{ns} (2s-1 \to 2s)$$

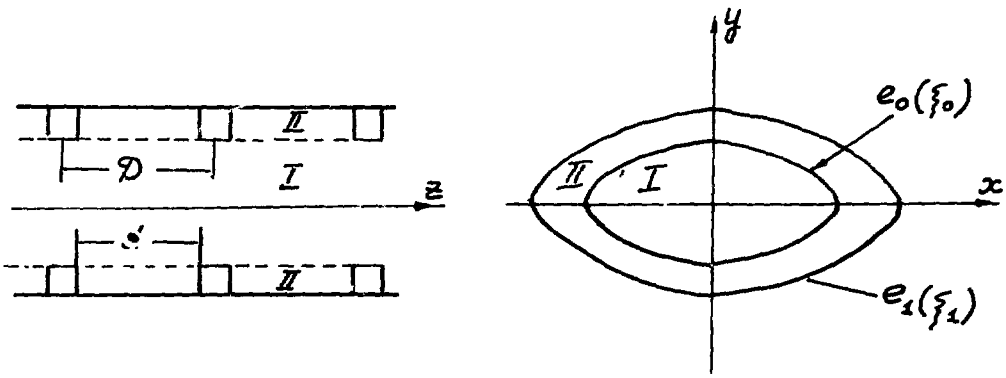
II
D
I
z
δ
II
y
$e_0(\xi_0)$
II
I
x
$e_1(\xi_1)$

Рис.I

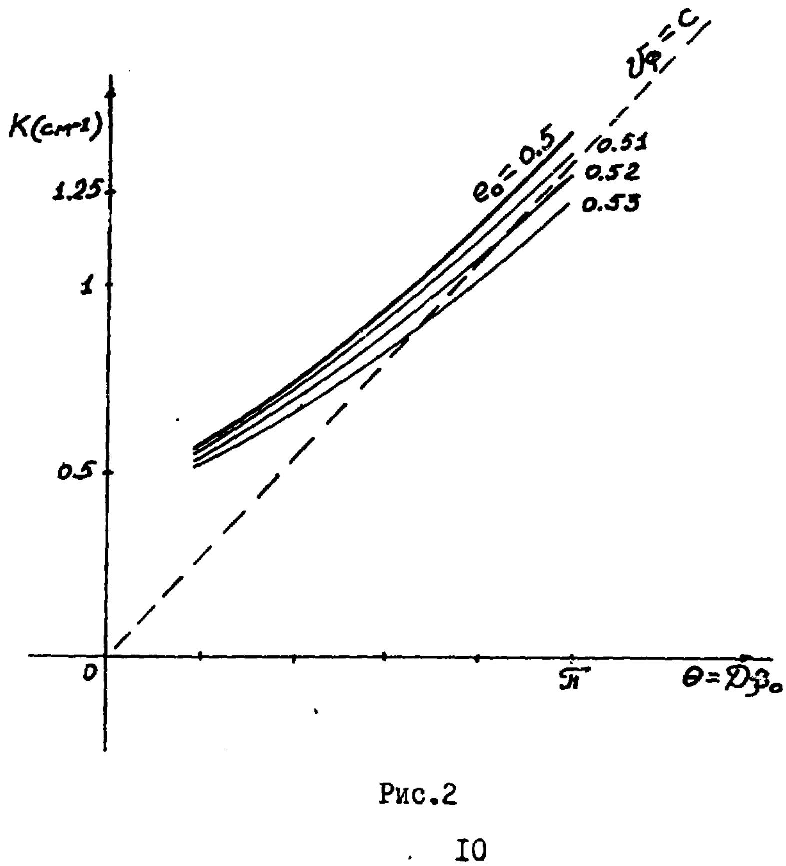
$v_\varphi = c$
K(cm-1)
1.25
1
0.5
0
$e_0 = 0.5$
0.51
0.52
0.53
π
$\theta = D\beta_0$

Рис.2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Chin Y. The wake field acceleration using a cavity of elliptical cross section.KEK 83-19, November 1983, A.

2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов.радио, 1957.

3. Мак-Лахман Н.В. Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953.

Рукопись поступила 26 марта 1986 г.

В.М.ЦАКАНОВ

МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать I3/УI-86г.	ВФ-05590	Формат 60x84/I6
Офсетная печать. Уч.изд.л. 0,5		Тираж 299 экз.Ц. 8к.
Зак.тип 379		Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна 2

индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ