индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-897(48)-86

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Э.Д.ГАЗАЗЯН, М.И.ИВАНЯН,
А.Д.ТЕР-ПОГОСЯН

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СФЕРОИДАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

ЦНИИатоминформ

ЕРЕВАН-1986

Նախնատիպ ЕФИ-897(48)-86

ԳԱԶԱԶՅԱՆ Է.Դ., ԻՎԱՆՅԱՆ Մ.Ի., ՏԵՐ-ՊՈՂՈՍՅԱՆ Ա.Դ.

ԳՆԴԱՁԵՎ ԱՐՁԱԳԱՆՔԻՉՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ստացվել են սեփական էլեկտրամագնիսական տատանումների ասիմպտոտները ձգված և տափակած գնդաձև արձագանքիչներում/ռեզոնատորներում/: Հետազոտված են այդ տատանումների հրկիզող կաուստիկ մակերևույթները և ,,քվանտային,, պայմանները:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1986

Preprint ЕФИ-897(48)-86

E.D. Gazazyan, M.I. Ivanyan, A.D. Ter-Pogossyan

THE ASYMPTOTIC THEORY OF SPHEROIDAL RESONATORS

The asymptotics of the inherent electromagnetic oscillations in the extended and flattened spheroidal resonators are obtained. The caustics and "quantum" conditions are studied.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1986

Препринт ЕФИ-897(48)-86

УДК 621.372

Э.Д.ГАЗАЗЯН,М.И.ИВАНЯН,А.Д.ТЕР-ПОГОСЯН

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СФЕРОИДАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Получены асимптотики собственных электромагнитных колебаний в вытянутом и сплюснутом сфероидальных резонаторах. Исследованы каустические поверхности этих колебаний и "квантовые" условия.

Ереванский физический институт

Ереван 1986

В работе [I] была развита равномерная асимптотическая теория решений уравнений Гельмгольца и Максвелла. В случае,когда существует решение соответствующей скалярной задачи (в уравнении Гельмгольца) , метод , развитый в [I] , сводится к асимптотическому разделению переменных в уравнениях Максвелла [2] с использованием в качестве базисных собственных функций скалярной задачи.

Вытянутые (верхние знаки) и сплюснутые (нижние знаки) сфероидальные координаты ξ , η , φ связаны с декартовыми координатами x , y , z посредством соотношений [3] :

$$x+iy=f\left[(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2)\right]^{1/2}e^{i\varphi}, \quad z=f\xi\eta, \qquad (I)$$

причем поверхности $\xi=const$ - софокусные сфероиды, $\eta=const$ - софокусные двухполостные (однополостные) гиперболоиды, $\varphi=const$ - полуплоскости , проходящие через ось z ; f - фокусное расстояние, z - ось вращения $(-1\le\eta\le 1\ , 0\le\varphi\le 2\pi\ ,$ ξ - в вытянутой сфероидальной системе координат меняется от I до ∞ , в сплюснутой сфероидальной системе - от 0 до ∞).

Решение уравнения Гельмгольца для вакуума в сфероидальных системах координат имеет вид:

$$U_{\substack{в\\c}} = R_{\substack{в\\c}}(\xi)\, S_{\substack{в\\c}}(\eta)\, T(\varphi), \qquad (2)$$

где $T(\varphi) = e^{\pm m\varphi}$, $m = 0, I, ..$; $R_{\substack{в\\c}}(\xi)$ и $S_{\substack{в\\c}}(\eta)$ – радиальные и угловые вытянутые (в) или сплюснутые (с) сфероидальные функции, удовлетворяющие уравнениям [I]

$$\frac{d^2 f_e(\xi_e)}{d\xi_e^2} + \alpha_e(\xi_e)\frac{d f_e(\xi_e)}{d\xi_e} + \kappa^2 \beta_e(\xi_e) f_e(\xi_e) = 0 \qquad (3)$$

при $\kappa\xi_1 = \xi$, $\kappa\xi_2 = \eta$, $\kappa\xi_3 = \varphi$, когда

$$d_{\substack{в\\c}}(\xi) = \frac{2\xi}{\xi^2 \mp 1}, \quad \alpha_{\substack{в\\c}}(\eta) = -\frac{2\eta}{1-\eta^2}, \quad \alpha_{\substack{в\\c}}(\varphi) = 0, \qquad (4)$$

$$\beta_{\substack{в\\c}}(\xi) = -\frac{\lambda}{\kappa^2(\xi^2\mp 1)} + f^2 \mp \frac{m^2}{\kappa^2(\xi^2 \mp 1)^2}, \quad \beta_{\substack{в\\c}}(\eta) = -\frac{\lambda}{\kappa^2(\eta^2-1)} \mp f^2 - \frac{m^2}{\kappa^2(\eta^2-1)^2}, \quad \beta_{\substack{в\\c}}(\varphi) = \frac{m^2}{\kappa^2}.$$

В соответствии с утверждениями работы [I] , уравнения $\beta_e(\xi_e) = 0$ определяют каустические поверхности, на которых геометрооптические решения расходятся. Метод, развитый в этой работе, позволяет записать равномерные выражения для компонент электромагнитного поля внутри сфероидального резонатора ($\xi = \xi_0$), асимптотически удовлетворяющие уравнениям Максвелла. В зависимости от того, относительно какого из сфероидальных ортов ($\vec{\varepsilon}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\varphi}_0$) определены типы волн, в резонаторе можно получить три группы решений:

$$\text{I.}\ E_{\xi\substack{в\\c}} = \frac{c}{i\kappa}\left(\frac{\xi^2\mp 1}{\xi^2\mp\eta^2}\right)^{1/2}(1-\eta^2)\left[f^2(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2) - \beta(\varphi)\right]^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\eta}U_{\substack{в\\c}},$$

$$E_{\eta\substack{в\\c}} = -\frac{c}{i\kappa}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2\mp\eta^2}\right)^{1/2}(\xi^2\mp 1)\left[f^2(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2) - \beta(\varphi)\right]^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\xi}U_{\substack{в\\c}}, \quad E_\varphi = 0, \qquad (5а)$$

$$H_{\xi\substack{в\\c}} = \frac{c}{(i\kappa)^2}\left(\frac{\xi^2\mp 1}{\xi^2\mp\eta^2}\right)^{1/2}\frac{1}{f}\left[f^2(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2) - \beta(\varphi)\right]^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\varphi}U_{\substack{в\\c}},$$

$$H_{\eta\substack{в\\c}} = -\frac{c}{(i\kappa)^2}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2\mp 1}\right)^{1/2}\frac{1}{f}\left[f^2(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2) - \beta(\varphi)\right]^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\varphi}U_{\substack{в\\c}},$$

$$H_{\varphi\substack{в\\c}} = -\frac{c}{f}\left[f^2(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2) - \beta(\varphi)\right]^{1/2}\left[(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2)\right]^{-1/2}U_{\substack{в\\c}};$$

$$\text{2.}\ E_{\xi\substack{в\\c}} = -\frac{c}{i\kappa}\left(\frac{\xi^2\mp\eta^2}{\xi^2\mp 1}\right)^{1/2}\left[f^2(\xi^2\mp\eta^2)(1-\eta^2) - \beta(\eta)(1-\eta^2)^2\right]^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\varphi}U_{\substack{в\\c}},$$

$$E_\eta = 0, \quad E_{\varphi\substack{в\\c}} = \frac{c}{i\kappa}\left(\frac{\xi^2\mp 1}{1-\eta^2}\right)^{1/2}\left[f^2\frac{\xi^2\mp\eta^2}{1-\eta^2} - \beta(\eta)\right]^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\xi}U_{\substack{в\\c}}, \qquad (5б)$$

$$H_{\xi\substack{в\\c}} = \frac{c}{(i\kappa)^2}\left(\frac{\xi^2\mp 1}{1-\eta^2}\right)^{1/2}\frac{1}{f}\left[f^2\frac{\xi^2\mp\eta^2}{1-\eta^2} - \beta(\eta)\right]^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}U_{\substack{в\\c}},$$

$$H_{\eta\substack{в\\c}} = -\frac{c}{f}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2\mp\eta^2}\right)^{1/2}\left[f^2\frac{\xi^2\mp\eta^2}{1-\eta^2} - \beta(\eta)\right]^{1/2}U_{\substack{в\\c}},$$

$$H_{\varphi\substack{в\\c}} = \frac{c}{(i\kappa)^2}\frac{1}{f}\left[f^2\frac{\xi^2\mp\eta^2}{1-\eta^2} - \beta(\eta)\right]^{-1/2}\left[(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2)\right]^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\varphi}U_{\substack{в\\c}};$$

$$\text{3.}\ E_\xi = 0, \quad E_{\eta\substack{в\\c}} = \frac{c}{i\kappa}\left(\frac{\xi^2\mp\eta^2}{1-\eta^2}\right)^{1/2}\left[f^2(\xi^2\mp\eta^2)(\xi^2\mp 1) - \beta(\xi)(\xi^2\mp 1)^2\right]^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\varphi}U_{\substack{в\\c}},$$

$$E_{\varphi\substack{в\\c}} = -\frac{c}{i\kappa}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2\mp 1}\right)^{1/2}\left[f^2\frac{\xi^2\mp\eta^2}{\xi^2\mp 1} - \beta(\xi)\right]^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\eta}U_{\substack{в\\c}}, \qquad (5в)$$

$$H_{\xi\substack{в\\c}} = -\frac{c}{f}\left(\frac{\xi^2\mp 1}{\xi^2\mp\eta^2}\right)^{1/2}\left[f^2\frac{\xi^2\mp\eta^2}{\xi^2\mp 1} - \beta(\xi)\right]^{1/2}U_{\substack{в\\c}},$$

$$H_{\eta\substack{в\\c}} = \frac{c}{(i\kappa)^2}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2\mp\eta^2}\right)^{1/2}\frac{1}{f}\left[f^2\frac{\xi^2\mp\eta^2}{\xi^2\mp 1} - \beta(\xi)\right]^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}U_{\substack{в\\c}},$$

$$H_{\varphi\substack{в\\c}} = \frac{c}{(i\kappa)^2}\frac{1}{f}\left[f^2\frac{\xi^2\mp\eta^2}{\xi^2\mp 1} - \beta(\xi)\right]^{-1/2}\left[(\xi^2\mp 1)(1-\eta^2)\right]^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\varphi}U_{\substack{в\\c}}.$$

Поля (5а,б,в) следует классифицировать как Н-типы волн. Выражения для полей Е-типов волн получаются из (5а,б,в) путем замены в них $\vec{E} \to \vec{H}$ и $\vec{H} \to -\vec{E}$. Чтобы полученные поля являлись бы собственными функциями идеально проводящего сфероида $\xi = \xi_0$, на этой поверхности должны удовлетворяться граничные условия:

$$E_\eta = H_\xi = E_\varphi = 0 \qquad \text{при} \quad \xi = \xi_0. \qquad (6)$$

Еще одно граничное условие вытекает из однозначности угловых сфероидальных функций относительно плоскости $z = 0$ или $\eta = 0$. Эти условия сводятся к выбору четных или нечетных угловых сфероидальных функций $S(\eta)$ [3] или их первых производных. Для трех наборов электромагнитных колебаний (5а,б,в) указанные граничные условия записываются в виде:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{I} & & 2 & & 3 & & \\ \frac{dR(\xi)}{d\xi}=0 \ (R(\xi)=0) & & \frac{dR(\xi)}{d\xi}=0 \ (R(\xi)=0) & & R(\xi)=0 \ \left(\frac{dR(\xi)}{d\xi}=0\right) & & \text{при} \ \xi=\xi_0; \\ & \Bigg\} & & \Bigg\} & & \Bigg\} & \qquad (7) \\ S(\eta)=0 \ \left(\frac{dS(\eta)}{d\eta}=0\right) & & \frac{dS(\eta)}{d\eta}=0 \ (S(\eta)=0) & & S(\eta)=0 \ \left(\frac{dS(\eta)}{d\eta}=0\right) & & \text{при} \ \eta=0; \end{array}$$

где в скобках приведены граничные условия для Е-типов волн. Из пар граничных условий I,2 или 3 определяются собственные значения λ и собственные частоты $k = \frac{\omega}{c}$.

Для получения осциллирующих (незатухающих) решений необходимо, чтобы функции $\beta(\xi)$ и $\beta(\eta)$ не принимали бы отрицательных значений. Возможные значения корней этих функций $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ в вытянутом сфероидальном резонаторе определяют единственный тип колебаний "шепчущей галереи" [5].

$$0 \leqslant \tilde{\eta} \leqslant 1 \leqslant \tilde{\xi} \leqslant \xi_0 , \qquad (8)$$

для которых каустическими поверхностями являются вытянутый,софокусный исходному ($\xi = \xi_0$), сфероид

$$\xi = \tilde{\xi} = \left(1 + \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4m^2k^2f^2}}{2k^2f^2}\right)^{1/2}, \quad \xi \geqslant 1 \qquad (9а)$$

и двухполостный гиперболоид

$$\eta = \tilde{\eta} = \pm\left(1 + \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4m^2k^2f^2}}{2k^2f^2}\right)^{1/2}, \quad |\eta| < 1 , \qquad (9б)$$

ограничивающие объем, в котором распространяются геометрооптические лучи (см. [4]). В случае сплюснутого сфероида каустическими поверхностями являются

$$\tilde{\xi} = \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4m^2k^2f^2}}{2k^2f^2} - 1\right)^{1/2}, \quad \xi \geqslant 0 \qquad (\mathrm{I}0а)$$

$$\tilde{\eta}_{1,2} = \left(1 - \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4m^2k^2f^2}}{2k^2f^2}\right)^{1/2}, \quad |\eta| \leqslant 1 . \qquad (\mathrm{I}0б)$$

Из (I0а,б) явствует, что одновременно могут реализоваться каустические поверхности $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}_2$ и $\tilde{\eta}_1$ $\tilde{\eta}_2$. Область распространения геометрооптических лучей в первом случае ограничена софокусным исходному ($\xi = \xi_0$) сплюснутым сфероидом $\xi = \tilde{\xi}$ и однополостным гиперболоидом $\eta = \tilde{\eta}_2$. Эти колебания определяются неравенствами (8) и относятся к типу "шепчущей галереи". Второй тип колебаний – тип "прыгающего мячика" [5], реализуемый в объеме, ограниченном двумя софокусными однополостными гиперболоидами $\eta = \tilde{\eta}_1$ и $\eta = \tilde{\eta}_2$, определяется неравенствами

$$0 \leqslant \tilde{\eta}_1 \leqslant \eta \leqslant \tilde{\eta}_2 \leqslant 1 . \qquad (\mathrm{II})$$

Если в граничных условиях (7) вместо фигурирующих там радиальных и угловых сфероидальных функций подставить их дебаевские (квазиклассические) асимптотики [6], опуская каждый раз фазовую добавку $-\frac{\pi}{4}$, когда соответствующая каустика не реализуется (β_e $\xi_e > 0$), мы приходим к "квантовым условиям",вполне аналогичным квантовым условиям в старой квантовой теории Бора-Зоммерфельда. Выпишем их для первой пары из (7):

$$K\int_{\tilde{\xi}}^{\xi_0}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi=\pi\left(\tfrac{1}{4}+N_\xi\right) \quad \text{и} \quad K\int_{-\tilde{\eta}}^{\tilde{\eta}}\sqrt{\beta(\eta)}\,d\eta=\pi\left(\tfrac{1}{2}+2N_\eta+1\right),\ N_\xi,N_\eta=0,1\ldots \qquad (I2a)$$

для Н-типов волн, и

$$K\int_{\tilde{\xi}}^{\xi_0}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi=\pi\left(\tfrac{3}{4}+N_\xi\right) \quad \text{и} \quad K\int_{-\tilde{\eta}}^{\tilde{\eta}}\sqrt{\beta(\eta)}\,d\eta=\pi\left(\tfrac{1}{2}+2N_\eta\right),\ N_\xi,N_\eta=0,1\ldots \qquad (I2б)$$

для Е-типов. Эти квантовые условия справедливы для типа колебания , определяемого неравенствами (8) ("шепчущая галерея") в вытянутых и сплюснутых сфероидальных резонаторах. При этом функции $\beta(\xi)$ и $\beta(\eta)$ для соответствующего резонатора определяются из (4). Для второго типа колебаний (II) ("прыгающий мячик"), реализуемого только в сплюснутом сфероидальном резонаторе, соответствующие квантовые условия записываются в виде $\beta(\xi)>0$, следовательно, фазовая добавка - $\frac{\pi}{4}$ в асимптотике радиальных сфероидальных функций опущена :

$$K\int_{0}^{\xi_0}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi=\pi N_\xi, \quad K\int_{\tilde{\eta}_1}^{\tilde{\eta}_2}\sqrt{\beta(\eta)}\,d\eta=\pi\left(\tfrac{1}{2}+2N_\eta+1\right) \text{ — Н-типы волн,}$$

$$K\int_{0}^{\xi_0}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi=\pi\left(\tfrac{1}{2}+N_\xi\right), \quad K\int_{\tilde{\eta}_1}^{\tilde{\eta}_2}\sqrt{\beta(\eta)}\,d\eta=\pi\left(\tfrac{1}{2}+2N_\eta\right) \text{ — Е-типы волн.} \qquad (I3)$$

В (I2) и (I3) числа $2N_\eta$ и $2N_\eta+1$ соответствуют числам нулей угловых сфероидальных функций и определяют их четность или нечетность как

$$S(\eta)=(-1)^m S(-\eta) \quad ; \quad m=2N_\eta \quad \text{или} \quad m=2N_\eta+1 . \qquad (I4)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Газазян Э.Д.,Иванян М.И. Равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Гельмгольца и Максвелла. Радиотехника и электроника, 1984, т.29, № 5, с.830-835.

2. Газазян Э.Д.,Иванян М.И. Коротковолновая асимптотика электромагнитного поля внутри замкнутого эллипсоида. Радиотехника и электроника, I976, т.2I, № I0, с.2052-206I.

3. Комаров И.В.,Пономарев А.И.,Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука,I976.

4. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов.радио, I966.

5. Релей Дж. Теория звука, М.Л.: ГИТТЛ, I944,т.2.

6. Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука,I974.

Рукопись поступила I8 апреля I986 г.

Э.Д.ГАЗАЗЯН,М.И.ИВАНЯН,А.Д.ТЕР-ПОГОСЯН

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СФЕРОИДАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать II/УI-86г. ВФ-05593 Формат 60х84/I6
Офсетная печать. Уч.изд.л. 0,5 Тираж 299 экз.Ц. 8
Зак.тип. 360 Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна 2