Препринт ЕФИ-905(56)-86

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А.А.ОГАНДЖАНЯН

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЯХ ПЛОСКОГО ОНДУЛЯТОРА, ОБРАЗОВАННОГО ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗОГНУТЫМИ ЛИНИЯМИ ТОКА

ЦНИИатоминформ

ЕРЕВАН-1986

Նախատիպ ԕФИ-905(56)-86

Ա.Ա.ՕՀԱՆՋԱՆՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ՊԱՐԲԵՐԱԲԱՐ ԿՈՐԱՑՎԱԾ ՀՈՍԱՆՔԻ ԳԾԵՐԻՑ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ՀԱՐԹ ՕՆԴՈՒԼՅԱՏՈՐԻ ԴԱՇՏՈՒՄ

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ պարբերաբար կորացված կամայական ձև ունեցող հոսանքի գիծը կարող է դառնալ հարթ օնդուլյատորի տեխնիկական իրականացման կառուցվածքային տարրը: Առաջարկված են այդպիսի իրականացման օրինակներ, և դրանց համար դուրս են գրված մագնիսական դաշտեր: Գտնված է շարժման հավասարման լուծումը՝ առանցքային մոտավորությամբ, որը կախված է հոսանքի գծի ձևից: Դա թույլ կտա ստանալ էլեկտրոնների ճառագայթման սպեկտրերը՝ դաշտի աղբյուրների ձևի համապատասխան ընտրության դեպքում: Մասնավորապես հնարավոր է ճառագայթման բարձր հարմոնիկների ուժգնացում՝ մագնիսական դաշտի հարևան տեղամասերից բարձր հարմոնիկների նվազագույն մարման հաշվին:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1986

Preprint ЕФИ-805(56)-86

A.A. OHANJANYAN

MOVEMENT OF ELECTRONS IN FLAT UNDULATOR FIELDS INDUCED BY PERIODICALLY CURVED POWER LINES

It is shown, that a periodically curved power line of an arbitrary form can serve as a construction element for the technical realization of a flat undulator. Examples of such realizations are proposed and magnetic fields are written for them. The movement equation is solved in a paraxial approximation. This solution is a functional of the form of the power line. The direct binding of electron dynamics to the field sources will allow, in principle, to obtain the desired spectrum of electrons radiation by the choice of the form of the field sources. In particular, high harmonics may be increased due to minimization of quenching of high harmonics of the magnetic field of the neighbouring sections.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1986

Препринт ЕФИ-905(56)-86

УДК 621.384.01

А.А.ОГАНДЖАНЯН

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЯХ ПЛОСКОГО ОНДУЛЯТОРА, ОБРАЗОВАННОГО ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗОГНУТЫМИ ЛИНИЯМИ ТОКА

В работе показано, что периодически изогнутая линия тока произвольной формы может служить конструктивным элементом в технических реализациях плоского ондулятора. Предложены примеры таких реализаций и для них выписаны магнитные поля. Найдено решение уравнения движения в параксиальном приближении. Это решение является функционалом от формы линии тока. Непосредственная привязка динамики электронов к источникам поля, позволит, в принципе, получить нужную форму спектра излучения электронов за счет выбора формы источников поля. В частности, возможно усиление высоких гармоник излучения за счет минимизации гашения высоких гармоник магнитного поля от соседних участков.

Ереванский физический институт

Ереван 1986

Динамика электронов в магнитных ондуляторах исследовалась во многих работах (см.напр.[I,2]). Чаще всего рассматривается спиральный ондулятор, состоящий из двух спиральных лент, расположенных диаметрально противоположно на цилиндрической поверхности и образующих прямой и обратный провода цепи с током. Магнитное поле такой системы хорошо известно и это позволяет исследовать движение электронов в реальном (удовлетворяющем уравнениям Максвелла) поле, с учетом отличия такого поля от своего осевого значения ,[3-5] , обычно применяемого для иллюстрации основных качественных результатов теории. Для плоского ондулятора поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, обычно не выписывается и исследование динамики электронов ограничивается качественным рассмотрением в косинусоидальном поле с постоянной амплитудой.

В настоящей работе рассмотрим некоторые возможные реализации плоского ондулятора линейными проводниками с током, выпишем магнитные поля и рассмотрим движение электронов в них.

Введем единичные орты $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3$ по осям x, y, z соответственно и пусть линия тока расположена в плоскости $y = 0$ и за-даётся уравнением $x = f(z)$; $f(z) > 0$. Магнитное поле $\vec{H}$, создаваемое постоянным током J , протекающим по этой линии в направлении $\vec{e}_3$, определяется законом Био - Савара - Лапласа и записывается в виде:

$$\vec{H} = \frac{J}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \, \frac{\vec{e}_2\,[x - f(z_1) - (z - z_1)\cdot f'(z_1)] + y\,[f'(z_1)\cdot\vec{e}_3 - \vec{e}_1]}{[(z - z_1)^2 + (x - f(z_1))^2 + y^2]^{3/2}}, \quad (1)$$

где c - скорость света, штрих означает дифференцирование по аргументу. Для периодических с периодом λ функций $f(z)$ магнитное поле, как это видно из (1), будет также периодической функцией z с тем же периодом λ . Поле (1) является в этом случае в плоскости $y = 0$ полем плоского ондулятора . Таким образом периодически изогнутая линия тока может служить конструктивным элементом в структурах, образующих плоский ондулятор. Приведем примеры таких структур.

1. Две периодические линии тока, расположенные в плоскости $y = 0$ и задаваемые уравнениями $x = \pm f(z)$; $f(z) > 0$. Магнитное поле такой структуры имеет вид:

$$\vec{H} = \frac{J}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \left\{ \frac{\vec{e}_2\,[x - f(z_1) - (z - z_1)\cdot f'(z_1)] + y\cdot[f'(z_1)\vec{e}_3 - \vec{e}_1]}{[(z - z_1)^2 + (x - f(z_1))^2 + y^2]^{3/2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\vec{e}_2\cdot[x + f(z_1) + (z - z_1)\cdot f'(z_1)] - y\cdot[f'(z_1)\vec{e}_3 + \vec{e}_1]}{[(z - z_1)^2 + (x + f(z_1))^2 + y^2]^{3/2}} \right\} \quad (2)$$

здесь по линии $x = f(z)$ ток течет в направлении $\vec{e}_3$, а по второй линии в противоположном направлении.

2. Две линии, расположенные в плоскостях $y = \pm a$, симметрично относительно плоскости $y = 0$. Форма обеих линий за-

даётся периодической функцией $f(z)$, среднее которой по периоду в этом случае равно нулю. Для такой структуры имеем:

$$\vec{H} = \frac{J}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_1 \left\{ \frac{\vec{e}_2[x-f(z_1)-(z-z_1)\cdot f'(z_1)]+(y-a)\cdot[f'(z_1)\vec{e}_3-\vec{e}_1]}{[(z-z_1)^2+(x-f(z_1))^2+(y-a)^2]^{3/2}} + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \frac{\vec{e}_2[x-f(z_1)-(z-z_1)\cdot f'(z_1)]+(y+a)\cdot[f'(z_1)\vec{e}_3-\vec{e}_1]}{[(z-z_1)^2+(x-f(z_1))^2+(y+a)^2]^{3/2}} \right\} .$$

Здесь оба тока текут в направлении $\vec{e}_3$.

3. Структура, образованная одновременным использованием предыдущих четырех линий. При этом относительное расположение обеих пар линий должно соответствовать сложению ондуляторных полей.

4. N линий $x_1 = f(z)$, плоскости расположения которых составляют с плоскостью $y=0$ углы α_i ; $(x_1 = x\cdot\cos\alpha_i + y\cdot\sin\alpha_i)$; $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Магнитное поле записывается в виде

$$\vec{H} = \frac{J}{c}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz_1}{[(z-z_1)^2+(x\cos\alpha_i+y\sin\alpha_i-f(z_1))^2+(y\cos\alpha_i-x\sin\alpha_i)^2]^{3/2}}\cdot\left\{(\vec{e}_2\cos\alpha_i-\vec{e}_1\sin\alpha_i)\cdot\right. \tag{4}$$

$$\left.\cdot(x\cos\alpha_i+y\sin\alpha_i-f(z_1)-(z-z_1)f'(z_1))+(y\cos\alpha_i-x\sin\alpha_i)\cdot(f'(z_1)\vec{e}_3-\vec{e}_1\cos\alpha_i-\vec{e}_2\sin\alpha_i)\right\} .$$

Здесь $\delta_i = \pm 1$ - соответствует относительному направлению тока в i - ой линии. Знак δ_i выбирается так, чтобы все слагаемые в (4), образующие ондуляторное поле, были одного знака. При такой минимизации гашения амплитуда результирующего поля будет содержать множитель N , что в интенсивности излучения электрона даст множитель N_2 . Заметим, что при этом не все N линий равноценны. Среди них есть такие, вклад которых в ондуляторное поле при оптимальном выборе δ_i пренебрежимо мал. На их месте можно разместить фокусирующие либо корректирующие элементы. Как показано в [6], две периодически изогнутые линии с одинаковым направлением токов, расположенные в одной плоскости, аналогичны магнитным квадруполям и из комбинации таких линий можно образовать жесткофокусирующую структуру. Внешне плоский ондулятор типа 4 можно представить, как сверхпроводящий магнитный блок (диполь или квадруполь) больших ускорителей, обмотка которого периодически изогнута вдоль оси магнита.

Постоянную составляющую полей (2) - (4) можно занулить при помощи внешнего магнитного поля, либо добавлением к каждой линии тока в той же плоскости обратной линии с противоположным направлением тока. Обратный провод может быть прямолинейным, с подобранным значением тока, или периодическим. В частности, для линии $x = f(z)$ в качестве обратной можно взять линию $x = f(z + \ell)$ с постоянной ℓ (напр. $\ell = \frac{\lambda}{2}$). В ондуляторе типа 4 с этой же целью можно вместо добавления новых обратных проводов использовать часть обмоток. В дальнейшем постоянную часть магнитного поля в области взаимодействия будем считать равной нулю.

Рассмотрим теперь динамику электронов в выписанных полях.

Пусть компоненты y_0 и $\dot{y}_0$ начальных координаты и скорости равны нулю (везде далее индексом ноль будем обозначать значения соответствующих величин в начальный момент $t = t_0$). Тогда движение происходит в плоскости $y = 0$. Ограничим область движения еще одним условием: $x \ll \min f(z)$ для полей (2) и (4), и

$x \ll a$ для поля (3). Разложение полей по малым x начинается с членов нулевого порядка, которые и являются собственно ондуляторными полями

$$\vec{H}^{(0)} = \vec{h} \cdot \frac{2\pi J}{c\lambda} \cdot \chi(z), \tag{5}$$

где[x)]

$$\chi(z) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \frac{(z_1 - z) f'(z_1) - f(z_1)}{[(z - z_1)^2 + \varphi^2(z_1)]^{3/2}} - \chi_c ; \quad \chi_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \frac{(z_1 - z) f'(z_1) - f(z_1)}{[(z - z_1)^2 + \varphi^2(z_1)]^{3/2}}$$

$\varphi(z) = f(z)$ для полей (2) и (4), и $\varphi^2(z) = a^2 + f^2(z)$ для (3); $\vec{h} = 2\vec{e}_2$ для полей (2) и (3), и $\vec{h} = \sum_{i=0}^{N-1} \delta_i (\vec{e}_2 \cos\alpha_i - \vec{e}_1 \sin\alpha_i)$ для поля (4) [xx)]

Уравнение движения в поле (5) запишется в виде:

$$\begin{cases} \ddot{z} = -\kappa\omega \dot{x} \cdot \chi(z) \\ \ddot{x} = \kappa\omega \dot{z} \cdot \chi(z) \end{cases} \tag{6}$$

---

x) Если постоянная составляющая магнитного поля зануляется добавлением периодической обратной линии тока, то вместо χ_c из подынтегральной функции в выражении для $\chi(z)$ вычитается такая же функция с формой обратной линии.

xx) Покажем, как можно выбрать оптимальное $\vec{h}$ для поля (4). Возьмем $\delta_i = 1$ при $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ и $\delta_i = -1$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{3\pi}{2}$. Если теперь линии тока расположить симметрично относительно плоскости $y = 0$, то $\sum_{i=0}^{N-1} \delta_i \sin\alpha_i = 0$ и $\vec{h} = \vec{e}_2 \sum_{i=0}^{N-1} |\cos\alpha_i|$. При $N \gg 1$ имеем $\vec{h} = \frac{4N}{\pi} \vec{e}_2$.

где $K = \vec{e}_z \cdot \vec{h} \cdot \frac{Je}{mc^3\beta\gamma} = \vec{e}_z \cdot \vec{h} \cdot \frac{J(\text{кА})}{17\beta\gamma}$; $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$; β – скорость частицы в единицах скорости света, $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ – лоренц-фактор, точка означает дифференцирование по времени. Второе из уравнений (6) дает интеграл движения связанный с поперечным импульсом:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + K\omega \int_{z_0}^{z} x(z)dz = \dot{x}_0 + cK \cdot (I(z) - I(z_0)). \tag{7}$$

Интегралом (7) определяется траектория электрона:

$$x = x_0 + K \int_{z_0}^{z} dz \left[\frac{\dot{x}_0}{cK} + I(z) - I(z_0)\right] \cdot \left\{\beta_0^2 - K^2\left[\frac{\dot{x}_0}{cK} + I(z) - I(z_0)\right]^2\right\}^{-1/2}. \tag{8}$$

Здесь мы полагаем продольную скорость положительной во все моменты времени.

Назовём равновесной частицу, у которой начальные поперечная скорость $\dot{x}_0$ и продольная координата z_0 связаны соотношением

$$\dot{x}_0 = cK \cdot (I(z_0) - I_c), \tag{9}$$

а I_c находится из условия

$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dz \cdot [I(z) - I_c] \cdot \{\beta_0^2 - K^2 \cdot [I(z) - I_c]^2\}^{-1/2} = 0$$

При этом нулевая фурье-гармоника подынтегральной функции в (8) отсутствует и траектория представляет собой периодические колебания вокруг оси z. Спектр колебаний, а значит и спектр излучения электронов, является функционалом источников магнитного поля. Это обстоятельство позволит, в принципе, получить заданную форму спектра излучения выбором формы источников поля.

Движение полностью определяется, если к (8) добавить выражение, определяющее зависимость продольной координаты от времени:

$$\int_{z_0}^{z} dz\cdot\left\{\beta_0^2-\kappa^2\cdot[I(z)-I_c]^2\right\}^{-1/2}=c\cdot(t-t_0). \qquad (10)$$

Если $\kappa\cdot\max I(z)\ll 1$, выражения (8)-(10) можно разложить по степеням κ. При этом, постоянная I_c и продольная скорость содержат только четные степени κ, а уравнение, определяющее траекторию – нечетные. С точностью до квадратичных членов, равновесное движение определяется равенствами

$$x=x_0+\frac{\kappa}{\beta_0}\int_{z_0}^{z} I(z)dz;\quad z=\tau-\frac{\kappa^2}{2\beta_0^2}\int_{z_0}^{\tau} d\tau\cdot I^2(\tau);\quad I_c=\frac{\kappa^2}{2\beta_0^2\lambda}\cdot\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dz\cdot I^3(z),$$

где $\tau=c\beta_0(t-t_0)+z_0$. Когда периодическое поле содержит только одну гармонику, $I_c=0$; при наличии двух или более гармоник I_c может и не равняться нулю. В этом случае равновесное движение определяется не только амплитудой магнитного поля, как это имеет место в качественных расчетах с использованием гармонического поля, но и его формой.

Условие применимости разложения полей (2)-(4) по малым x накладывает некоторые ограничения на применимость полученных результатов:

$$x_0 \ll \varphi_m \quad ; \quad \frac{K}{\beta_0}\cdot max\left\{\int_{z_0}^{z} I(z)\,dz\right\} \ll \varphi_m \; , \qquad (11)$$

где φ_m равно минимальному значению функции $\varphi(z)$. К (11) надо добавить условие, появляющееся при нарушении равновесного соотношения (9)

$$\delta\dot{x}_0\cdot(z-z_0) \ll \beta_0\cdot\varphi_m \; , \qquad (12)$$

где $\delta\dot{x}_0 = \frac{x_0}{c} - K\cdot[I(z_0)-I_c]$ – расстройка равновесия. Соотношения (11) можно рассматривать, как ограничения на диаметр пучка и параметры магнитной системы, а (12) как связь между длиной ондулятора и угловой расходимостью пучка без фокусировки. Заметим, что ондулятор типа I, например, обладает фокусировкой в направлении $\vec{e}_2$. Линеаризованное по малым отклонениям от плоскости $y=0$ уравнение движения представляет собой уравнение Хилла и выбором параметров можно попасть в его область устойчивости.

Периодические функции $I(z)$ и $\int I(z)dz$, которыми определяется поперечное движение, в некоторых случаях удобно представить в виде однократных интегралов. Приведем эти выражения для случая, когда постоянная составляющая магнитного поля зануляется добавлением периодической обратной линии тока формы $\overline{f(z)}$:

$$I(z)=\int_{-\infty}^{\infty} dz_1\cdot\left\{\frac{f'(z)+f(z_1)\cdot\frac{z_1-z}{\varphi^2(z_1)}}{\sqrt{(z-z_1)^2+\varphi^2(z_1)}} - \frac{\overline{f'(z_1)}+\overline{f(z_1)}\cdot\frac{z_1-z}{\overline{\varphi^2(z_1)}}}{\sqrt{(z-z_1)^2+\overline{\varphi^2(z_1)}}}\right\} ; \quad \overline{\varphi(z)}=\begin{cases}\overline{f(z)} & \text{для (2), (4)}\\ \sqrt{a^2+\overline{f^2(z)}} & \text{для (3)}\end{cases}$$

$$\int I(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \cdot \Big\{ f'(z_1)\cdot \ln\left|z-z_1+\sqrt{(z-z_1)^2+\varphi^2(z_1)}\right| - \frac{f(z_1)}{\varphi^2(z_1)}\cdot\sqrt{(z-z_1)^2+\varphi^2(z_1)} -$$

$$-\overline{f'(z_1)}\cdot \ln\left|z-z_1+\sqrt{(z-z_1)^2+\overline{\varphi^2(z_1)}}\right| + \frac{\overline{f(z_1)}}{\overline{\varphi^2(z_1)}}\cdot\sqrt{(z-z_1)^2+\overline{\varphi^2(z_1)}}\Big\} .$$

В заключение, несколько слов об ондуляторах конечной длины. Если длина ондулятора $L = 2N_0\cdot\lambda$, то в (I) интегрирование должно идти от $-N_0\lambda$ до $N_0\lambda$. Кроме того, в магнитное поле дают вклад поля токопроводов, питающих ондулятор. Без учета искажений, вносимых этими полями, искажения периодичности из-за конечной длины ондулятора вдали от границ можно оценить при больших N_0, как

$$\vec{H}(z+\lambda)-\vec{H}(z)=\frac{6J}{c(N_0\lambda)^4}\cdot\int_0^{\lambda} dz_1\cdot\Big\{-\vec{e}_2\cdot\left[(\alpha-f(z_1))(z-z_1+\lambda)+z_1\cdot f'(z_1)\cdot(z_1-2z-2\lambda)\right]+$$

$$+y\cdot\left[z_1\cdot f'(z_1)\cdot\vec{e}_3+\vec{e}_1\cdot(z-z_1+\lambda)\right]\Big\} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфёров Д.Ф., Башмаков Ю.А., Бессонов Е.Г. Ондуляторное излучение. Труды ФИАН, 1975, т.80, с.100-124.
2. Генераторы когерентного излучения на свободных электронах. Сб. статей/Под редакцией Рухадзе А.А. М.:Мир,1983,
3. Оганджанян А.А. О движении электронов в спиральном ондуляторе. Препринт ЕФИ-736(51)-84, Ереван,1984.
4. Бессонов Е.Г., Серов А.В. О генерировании электромагнитных волн пучками частиц в ондуляторах и ускорении частиц в ондуляторном линейном ускорителе. Препринт ФИАН - 87, Москва, 1980.
5. Blewett J.P., Chasman R. Wiggler magnets.- SSRP Report, No. 77/05, May, 1977.
6. Оганджанян А.А. Жесткофокусирующая проволочная структура с током. Препринт ЕФИ-901(52)-86, Ереван,1986.

Рукопись поступила 26 февраля 1986 г.

А.А.ОГАНДЖАНЯН
ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЯХ ПЛОСКОГО ОНДУЛЯТОРА,
ОБРАЗОВАННОГО ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗОГНУТЫМ ЛИНИЯМ ТОКА

Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 25/УШ-86г. ВФ-06874 Формат 60x84/16
Офсетная печать. Уч.изд.л. 0,8 Тираж 299 экз.Ц. 10 к.
Зак.тип.№ 490 Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна 2

индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ