

ԵՐԵՎԱՆԻ ԶՐԶՐԿՈՐ ԲՆՍՏՐՏՈՒՑ
ԵՐԵՎԱՆՍԿԻ ֓ՖԻԶԻԿԵՍԿԻ ԻՆՏԻՏՒՏ

ԳՐԱԿԱՆ ԶԱՂՈՐԴՈՒՄ ՆԱՇՐԵ ՏՈՎԵՐԵ

ԵՓԻ-95(74)

Գ.Մ.Գարիբյան, Լ.Ա.Գեւորկյան Կա Տի

**ՐԱՏԿԵՏ ՐԵՆՏԵՆՈՎՏԿՈՎՔՈ ԲԵՐԵԿՈՎՈՎՈՎՔՈ ԻՅԼՒԿԵՆԻԱ,
ՕԲՐԱԶՄՈՎՈՎՔՈ Բ ՐԵԴՒԼՅԱՐՆՔԻ Ի ՆԵՐԵԴՒԼՅԱՐՆՔԻ
ՏԼՈՆՏՅԱՆ ՏՐԵԴԱԿ**

ԱՐՄՍ



ԵՐԵՎԱՆ

1974

ԵՐԵՎԱՆ

Научное сообщение ЕФИ- 95(74)

Г.М. ГАРСЯН, Л.А. ГЕВОРГИАН И

РАСЧЕТ РЕНТГЕНОВСКОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ,
ОБРАЗУЕМОГО В РЕГУЛЯРНЫХ И НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Ереван 1974

Г.М.ГАРИБИАН,Л.А.ГЕВОРГЯН,С.ЯНГ

РАСЧЕТ РЕНТГЕНОВСКОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ,
ОБРАЗУЕМОГО В РЕГУЛЯРНЫХ И НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В работе получены формулы для рентгеновского переходного излучения, образуемого в нерегулярной стопке с учетом поглощения в виде, удобном для численных расчетов. Дана также схема расчета частотного спектра излучения для регулярной стопки в зависимости от параметров стопки и лоренц-фактора Барра.

Ереванский физический институт

Ереван 1974

Scientific Report BON-95(74)

G.M. GARIBIAN, L.A. GEVORGIAN, S. YANG

THE CALCULATION OF X-RAY TRANSITION
RADIATION GENERATED IN REGULAR AND
IRREGULAR LAYERED MEDIA

Formulae for the X-ray transition radiation produced in an irregular stack of plates are obtained taking into account the absorption and presented in a form convenient for numerical calculation. The transition radiation generated in a regular stack is also considered. For the last case a procedure for calculation of the radiation frequency spectrum depending on the stack parameters and the partial Lorentz-factor is given.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1974

(C) Ереванский физический институт, 1974

В работах [1а, б] были получены формулы для рентгеновского переходного излучения, образуемого в стопке, состоящей из хаотически расположенных пластин с произвольными толщинами. Выполнение этих работ было вызвано тем, что в [2] экспериментально наблюдалось рентгеновское переходное излучение, образованное в пенопласте, который может быть, по-видимому, моделирован в виде указанной выше нерегулярной стопки. Таким же образом может быть рассчитано излучение, возникающее в пленке, образованной из жидкого дейтерия [3]. Кроме того, во всех реальных регулярных стопках всегда имеется разброс как по толщинам пластин, так и по расстояниям между ними. Поэтому необходимо выяснить также и влияние этого разброса на свойства переходного излучения.

Как видно из работ [1а, б] нерегулярность может существенно изменить угловой спектр переходного излучения. Что же касается влияния нерегулярности на частотный спектр (имеется в виду спектр проинтегрированный по углам излучения), то в том случае, когда в спектре имеются интерференционные максимумы и минимумы, нерегулярность выражает этот спектр, увеличивая его для одних частот и уменьшая его для других. При отсутствии интерференционных максимумов и минимумов нерегулярность почти не изменяет частотный спектр.

В настоящей работе мы приведем формулы для нерегулярной стопки с учетом поглощения в виде, удобном для численных расчетов. Получено условие, при котором формула для слабо нерегулярной стопки с учетом поглощения совпадает с формулой для регулярной стопки. В последнем разделе дана схема расчета частотного спектра для регулярной стопки в зависимости от параметров стопки и лоренц-фактора заряда.

Таким образом, формулы для рентгеновского переходного излучения, образуемого как в регулярной, так и нерегулярной стопках, представлены в настоящей работе в виде максимально удобном для численных расчетов.

I. Обозначим через $\langle dN_{\omega} / d\omega \rangle$ среднее число квантов (или частотный спектр) рентгеновского переходного излучения, образуемого в нерегулярной стопке, состоящей из N пластин со средней толщиной $\langle a \rangle$ и средним расстоянием $\langle b \rangle$ между ними. При этом мы будем пренебрегать отражениями, т.е. считать выполненным условие [4]:

$$|N r_1|^2 \ll 1, \quad (I)$$

где $r_1 \approx \omega_0^2 / 4\omega^2$ - коэффициент отражения от одной границы, ω_0 - плазменная частота вещества пластин, ω - частота излучения. Условие (I) написано без учета поглощения в веществе. Если учесть это обстоятельство, то в условии (I) число N следует заменить на эффективное число пластин (см. ниже).

Пусть $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ - лоренц-фактор заряда,
 $\epsilon = 1 - \omega_0^2 / \omega^2 + i \mu c / \omega$ - диэлектрическая постоянная вещества пластин, μ - линейный коэффициент поглощения излучения по интенсивности [5], θ - угол излучения относительно направления движения частиц. Тогда [10]

$$\left\langle \frac{dN_{\text{ref}}}{d\omega} \right\rangle = \int \left\langle \frac{d^2 N_{\text{ref}}}{d\omega d\vartheta} \right\rangle d\vartheta, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 N_{\text{ref}}}{d\omega d\vartheta} = \frac{2\vartheta^3}{137\pi\omega} \left| \frac{1}{1-\beta^2\epsilon+\vartheta^2} - \frac{1}{1-\beta^2+\vartheta^2} \right|^2 I, \quad (3)$$

где

$$I = 2 \left\{ \tilde{N}_{\text{eff}} \operatorname{Re} \frac{Q}{W} + \operatorname{Re} \frac{U U_p h_a V_p}{W W_p} \right\} \quad (4)$$

$$\tilde{N}_{\text{eff}} = \frac{1-p^N}{1-p}$$

$$Q = \frac{1+p}{2} (1+h_a h_c) - h_a - p h_c,$$

$$W = 1 - h_a h_c, \quad W_p = p - h_a h_c$$

$$U = 1 - h_a, \quad U_p = p - h_a,$$

$$V_p = p^N - h_a^N h_c^N; \quad p = \langle \exp(-\mu a_j) \rangle,$$

$$h_a = \langle \exp(-i\varphi a_j) \rangle,$$

$$h_c = \langle \exp(-i\varphi_0 b_j) \rangle,$$

$$\varphi = \frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{c} (\epsilon - \sin^2 \vartheta)^{1/2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{c} \cos \vartheta. \quad (5)$$

Угловые скобки означают усреднение по всем возможным значениям толщины пластин a_j и расстояний между ними b_j ($j = 1, 2, \dots$). Будем считать, что функции распределения случайных величин a_j и b_j заданы и соответственно равны $f_a(x)$

и $f_0(x)$ ($\int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f_0(x) dx = 1$).

Тогда

$$\langle \dots \rangle = \int_0^{\infty} \dots f_n(x) dx \quad (s=a \text{ или } b).$$

2. Очень часто экспериментально измеряемые функции распределения для толщин пластин и расстояний между ними хорошо аппроксимируются так называемым гамма-распределением (см. например [6]):

$$f(x) = \frac{\beta_0 x^{\alpha-1} \exp(-\beta_0 x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (6)$$

где α, β_0 - действительные параметры, $\alpha > 0, \beta_0 > 0$.
 $\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция (в настоящей работе по сравнению с формулами работы [10] произведена замена $\alpha+1 \rightarrow \alpha$).

Среднее значение $\langle x \rangle$ и среднее квадратичное отклонение $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ выражаются через параметры α и β_0 соответственно по формулам

$$\langle x \rangle = \alpha / \beta_0,$$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \alpha / \beta_0^2 = \langle x \rangle^2 / \alpha. \quad (7)$$

С помощью распределения (6) легко вычислить величины ρ, h_a и h_c :

$$\rho = \left(1 + \frac{\mu \langle a \rangle}{\alpha_a}\right)^{-\alpha_a},$$

$$h_a = m_a \exp(i\psi_a), \quad (8)$$

$$m_a = \left[\left(1 + \frac{\mu \langle a \rangle}{2\alpha_a}\right)^2 + \left(\frac{\psi' \langle a \rangle}{\alpha_a}\right)^2 \right]^{-\alpha_a/2}$$

$$\psi_a = -\alpha_a \operatorname{arctg} \frac{\psi'(a)}{\alpha_a + \mu(a)/2},$$

$$h_i = m_i \exp(i\psi_i),$$

$$m_i = \left[1 + \left(\frac{\psi_0(b)}{\alpha_i} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\psi_b = -\alpha_b \operatorname{arctg} \frac{\psi_0(b)}{\alpha_b},$$

где α_a и α_b - параметры гамма-распределений соответственно для толщины пластин a_j и расстояний между ними b_j .

Имея в виду вышеуказанные формулы, приведем расчетное выражение для величины I

$$I = \frac{2}{|W|^2} \left\{ \tilde{N}_{eff} (\operatorname{Re} Q \operatorname{Re} W + \operatorname{Im} Q \operatorname{Im} W) + \right. \\ \left. + \frac{m_b}{|W_p|^2} \left[(\cos \psi_b \cdot \operatorname{Re} V_p - \sin \psi_b \cdot \operatorname{Im} V_p) (c_1 c_2 + s_1 s_2) - \right. \right. \quad (9) \\ \left. \left. - (\sin \psi_b \cdot \operatorname{Re} V_p + \cos \psi_b \cdot \operatorname{Im} V_p) (s_1 c_2 - s_2 c_1) \right] \right\},$$

где введены обозначения

$$c_1 = \operatorname{Re} U \cdot \operatorname{Re} U_p - \operatorname{Im} U \operatorname{Im} U_p,$$

$$c_2 = \operatorname{Re} W \cdot \operatorname{Re} W_p - \operatorname{Im} W \operatorname{Im} W_p, \quad (10)$$

$$s_1 = \operatorname{Im} U \operatorname{Re} U_p + \operatorname{Im} U_p \operatorname{Re} U,$$

$$s_2 = \operatorname{Im} W \operatorname{Re} W_p + \operatorname{Im} W_p \operatorname{Re} W.$$

Для вычисления частотного спектра переходного излучения необходимо провести интегрирование по углам ϑ в формуле (2). Угол ϑ входит в выражение для I через величины φ_0 и φ' . Аналитически такое интегрирование провести не удастся, поэтому его следует провести численно на ЭВМ.

Заметим, что с увеличением степеней нерегулярности стопки

$$\xi_a = \frac{\sqrt{\langle \Delta a^2 \rangle}}{\langle a \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_a}}, \quad \xi_b = \frac{\sqrt{\langle \Delta b^2 \rangle}}{\langle b \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_b}} \quad (11)$$

осцилляционная зависимость углового спектра, затрудняющая численное интегрирование по углам ϑ , сглаживается. Поэтому, когда степени нерегулярности стопки превышают, например, 10%, численный расчет спектра переходного излучения требует сравнительно небольшого времени на ЭВМ.

При составлении программы расчета на ЭВМ полезно иметь в виду следующее обстоятельство. Как видно из работы [10], кривая углового спектра имеет резкие колебания при малых ϑ , и является гладкой при больших ϑ . Поэтому при численном интегрировании по ϑ разумно иметь малый шаг при малых ϑ и больший шаг при больших ϑ . Этого можно добиться заменой, например, $\vartheta^2 = z$.

3. В случае строго регулярной стопки, когда $a_j = a$, $b_j = b$ для всех $j = 1, 2, \dots$, имеем $\rho = \exp(-\mu a)$, $k_a = \exp(-i\varphi_a)$, $k_b = \exp(-i\varphi_b)$. Подставляя эти выражения в (4), (5) получаем

$$I = \left[(1 - \rho^{1/2})^2 + 4\rho^{1/2} \sin^2 Y \right] \cdot F$$

$$Y = \frac{\varphi'_a}{2}, \quad \varphi' = \operatorname{Re} \varphi = \frac{\omega}{2v} \left(\delta^{-2} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \nu^2 \right)$$

(12)

$$R = \frac{(1-p^{N/2})^2 + 4p^{N/2} \sin^2 NX}{(1-p^{N/2})^2 + 4p^{N/2} \sin^2 X}$$

$$X = \frac{\varphi' a + \varphi_0 b}{2}$$

При подстановке (12) в (3) получим известные формулы для рентгеновского переходного излучения, образуемого в регулярной стопке с учетом поглощения (см. [4]).

Очевидно, что переход к формулам (12) может быть осуществлен не только в случае строго регулярной стопки, но и для слабо нерегулярной стопки. Для того, чтобы найти условия, при которых такой переход имеет место, необходимо разложить величины p , h_a и h_c (см. формулы (5)) в ряд по малым отклонениям Δa_j и Δb_j величин a_j и b_j от их средних значений. Если потребовать, чтобы поправочные члены были малы по сравнению с основным членом, то получим следующее условие:

$$\frac{1}{4} (\varphi_0^2 \langle \Delta a^2 \rangle + \varphi_0^2 \langle \Delta b^2 \rangle) \ll \frac{1}{\tilde{N}_{eff}} \quad (13)$$

Заметим, что при $\mu \langle a \rangle / \alpha_a \ll 1$, величина \tilde{N}_{eff} переходит в

$$N_{eff} = \frac{1 - \exp(-N\mu \langle a \rangle)}{1 - \exp(-\mu \langle a \rangle)} \quad (14)$$

В случае $N\mu \langle a \rangle \ll 1$, т.е. когда в стопке можно не учитывать поглощения, имеем, что $N_{eff} \approx N$. Тогда условие (13) совпадает с условием, полученным в [1a]. В общем же случае, когда поглощение излучения в стопке необходимо учитывать, следует пользоваться условием (13), что вполне естественно, так как теперь фактически в процессе образования излучения участвует не полное число пластин N , а их эффективное чис-

по N_{eff} .

Зависимость величины N_{eff} от μa для разных значений N приводятся на рис.1. Заметим, что при заданном значении N чем больше поглощение, тем N_{eff} меньше N , т.е. тем слабее условие (15). Это находится в согласии с общим замечанием, вынесенным в [16], что поглощение и нерегулярность оказывает сходное влияние на характер излучения. А именно, поглощение в регулярной стопке приводит к тому, что угловой спектр излучения в ней становится глаже, т.е. делает его более близким к угловому спектру нерегулярной среды.

4. В заключение приведем схему расчета частотного спектра для регулярной стопки. Как показано в [7], для численного расчета удобно воспользоваться блок-схемой, приведенной на рис.2.

В этой схеме ромбом обозначается проверка условия, написанного внутри него.

При этом

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\omega l N_{eff}}{4\pi c \gamma^2}, \quad l = a + b, \\ d &= \text{entier}(A) + 1 - A, \\ A &= \frac{\omega l}{4\pi v} \left(\frac{v_0^2}{\omega^2} \frac{a}{l} + \gamma^{-2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$\text{entier}(A)$ означает наибольшее целое, не превышающее значения A .

Возможные последствия результата проверки обозначаются стрелками со словами "да" или "нет". Прямоугольники обозначают вычисления по формулам, символически изображенным внутри них.

Знак суммы означает суммирование ряда

$$\sum_{k=0}^d \frac{4 N_{eff} \pi^2 \omega^2}{(376 \omega)^2} \cdot \frac{\gamma_k \left[(1 - \rho^{1/2})^2 + 4 \rho^{1/2} \sin^2 \left[\frac{\omega a}{4\pi} \left(\gamma_k + \gamma^{-2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] \right]}{(\gamma_k + \gamma^{-2})^2 \cdot \left(\gamma_k + \gamma^{-2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2}, \quad (16)$$

где

$$\rho = \exp(-\mu a)$$
$$y_k = \frac{4\sigma v}{\omega^2} (k + d)$$

(k - целое число) (17)

Суммирование ряда (16) производится по значениям k , приведенным у знаков суммы внутри соответствующих прямоугольников.

Символы интегралов внутри прямоугольников 1, 3, 4 означают численное интегрирование по формуле

$$\int \frac{d^2 N_{ul}}{d\omega d\vartheta} d\vartheta, \quad (18)$$

где подынтегральная функция определяется формулой (3) с учетом (12), причем в 3 и 4 надо произвести замену $\vartheta^2 = y$. Кроме того

$$y'_0 = \frac{4\sigma v}{\omega^2} (d + \frac{1}{2}),$$
$$y'_{-1} = \frac{4\sigma v}{\omega^2} (d - \frac{1}{2}).$$

(19)

Символ H в прямоугольнике 5 означает величину

$$H = \frac{I}{13^2 \pi \omega} \left\{ \frac{2\gamma^{-2} + \omega_0^2/\omega^2}{\omega_0^2/\omega^2} \ln \frac{(y/2 + \gamma^{-2})(\omega_0^2 \gamma^2/\omega^2 + 1)}{(y/2 + \gamma^{-2} + \omega_0^2/\omega^2)} - \frac{y_0}{2} \left(\frac{1}{y/2 + \gamma^{-2} + \omega_0^2/\omega^2} + \frac{1}{y/2 + \gamma^{-2}} \right) \right\}, \quad (20)$$

где I определяется формулами (12) с заменой ϑ^2 на величину

$$y_\gamma = \frac{1}{6} \left\{ \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 2\gamma^{-2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 2\gamma^{-2} \right)^2 + 12 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \gamma^{-2} \right) \gamma^{-2}} \right\}. \quad (21)$$

В работе [7] была произведена оценка точности вычисления по предложенной блок-схеме. Было показано, что относительная ошибка не пре-

вышает значения $\frac{4}{N_{eff}}$.

Численный расчет, проведенный на ЭЕМ для различных значений параметров стонна, Лоренц-фактора заряда и частоты излучения, показал, что при $N_{eff} > 50$ результаты вычисления по блок-схеме рис.2 (прямоугольник 2-5) отличаются от соответствующих точных значений интеграла (2) не больше, чем на 1-2%. Но в тех случаях, когда старая формула [8:9] в виде ряда, соответствующая прямоугольнику 2, неприменима, она может дать результаты с ошибками в десятки процентов или даже в несколько раз.

ПОИСК И РАСЧЕТ

Рис.1 Зависимость $N_{\text{сд}}$ от μa . Число на прямой означает значение N .

Рис.2 Блок-схема программы вычисления частотного спектра перекрестного излучения, образуемого в регулярной структуре.

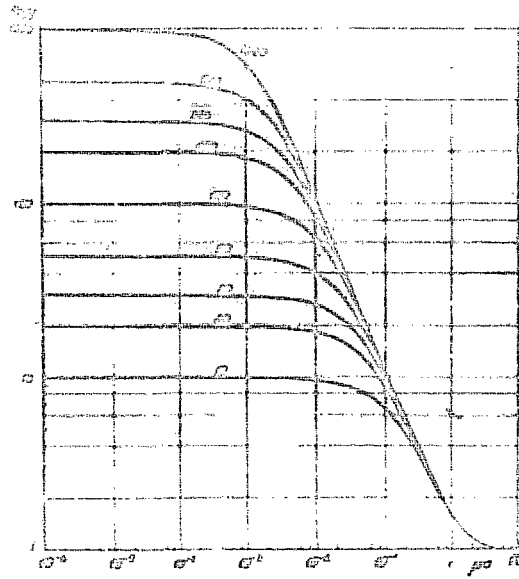


FIG. 1

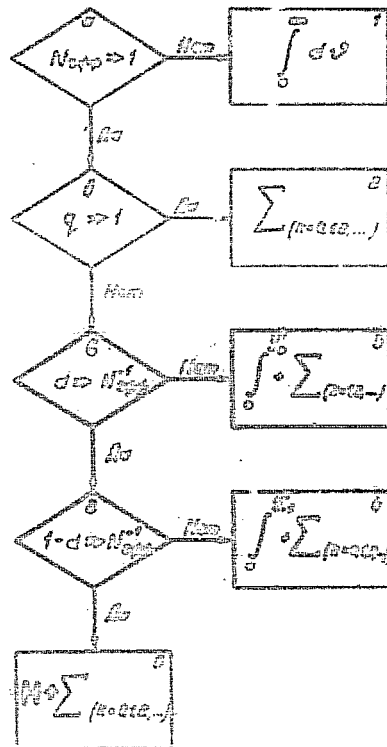


FIG. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Н. Гарибали, Л.А. Голубович, Ян Шт: а) Сов. АН Арм.ССР, Физика, 2, 428 (1973); б) ВВТО, 66, 582 (1974).
2. В.А. Аветисян, А.Н. Аветисян, Г.Н. Гарибали, П.Н. Лорисьян, К.К. Бумляев *Phys. Rev. Lett.* 25, 635 (1970); Сов. АН Арм.ССР, Физика, 2, 257 (1970).
3. J. B. Datschik. *Phys. Instr. Meth.* 103, 565 (1972).
4. Г.Н. Гарибали. ВВТО, 60, 39 (1971); Сов. АН Арм.ССР, Физика, 6, 3 (1971); Научное сообщение ВОН-27 (73).
5. Э.Стефан, Х.Нерасль. Сечение взаимодействия гамма-излучения. Москва, Атомиздат, 1973.
6. Д.Худсон. Статистика для физиков, Москва, "Мир", 1970.
7. Г.Н. Гарибали, Л.А. Голубович, Ян Шт. Сов. АН Арм.ССР, Физика, 2, 230 (1974).
8. М.Л. Тер-Микаелян, А.Д. Гасарян. ВВТО, 39, 1953 (1960).
9. Г.Н. Гарибали, Л.Н. Гольдман. ДАН Арм.ССР, 31, 219 (1960).

Рукопись поступила 5 апреля 1974 г.

Редактор Л.П. Мукаян

Тех. редактор А.С. Аоралян

Заказ 0977

ВФ-03431

Тираж 500

Подписано к печати 26/ХП-74г. Формат издания 30 x 40
0,1 уч.изд.л. Ц. 7 к.

Отпечатано на роталпринте
Ереванского физического института, Ереван 36, ул. Маршарьяна 2

