индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-958(8)-87

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

М.Б.БАГДАСАРЯН

О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫЙ РЯД ПО ПОЛНОЙ НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН — 1987

Նախնատիպ ЕФИ-958(8)-87

[illegible]

[illegible] ՄԱՍԻՆ՝

[illegible]

[illegible]

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ

ԵՐԵՎԱՆ 1987

Preprint ЕФИ-958(8)-87

M.B. BAGDASSARIAN

ON POSSIBILITY OF FUNCTIONS EXPANSION INTO A DIMENSIONLESS SERIES BY A COMPLETE NONORTHOGONAL SET OF FUNCTIONS

A possibility for expansion of functions into a dimensionless series by a nonorthogonal system of functions is considered. Expressions for the expansion coefficients are analytically found. The unambiguity of the expansion coefficients is proved. The Parseval equality is generalized.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1987

УДК 512.21.4 ЕФИ-958(8)-87

М.Б.БАГДАСАРЯН

О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫЙ РЯД ПО ПОЛНОЙ НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ

Рассматривается вопрос о возможности разложения функций в бесконечный ряд по полной неортогональной системе функций. Аналитически находятся выражения для коэффициентов разложения. Доказана неоднозначность коэффициентов раложения. Обобщено равенство Парсеваля.

Ереванский физический институт

Ереван 1987

При решении граничных задач математической физики, в теории интегральных уравнений, в вопросах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений возникает необходимость разложения функций в ряд по неортогональным функциям.

Для нахождения коэффициентов этого разложения в конце прошлого столетия была развита теория бесконечных систем уравнений с бесконечным числом неизвестных, являющихся коэффициентами разложения [I] .

Другой подход, получивший распространение, состоит в обрезании бесконечной системы, так что решение конечной системы определяется однозначно.

Как будет показано ниже, решение бесконечной системы с неортогональными функциями в определенной степени неоднозначно, что можно использовать для улучшения сходимости рядов.

В данной работе рассматривается вопрос о возможности нахождения коэффициентов разложения аналитически, не обрезая бесконечной системы уравнений.

Пусть бесконечный функциональный ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) F_n(x), \qquad (I)$$

где A_n - коэффициенты разложения, $\{F_n(x)\}$ - полная система ортонормированных функций в промежутке $[a,b]$, $\{\varphi_n(x)\}$ - бесконечная система функций в $[a,b]$.

Ниже будет показано, что выбор неортогональной системы в виде $\{\varphi_n F_n\}$ не нарушает общности разложения, а облегчает получение некоторых результатов.

Допустим, что ряд (I) сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $f(x)$, тогда имеем

$$\sum_n A_n \varphi_n(x) F_n(x) = f(x). \tag{2}$$

Разложим в ряд по системе $\{F_n(x)\}$ $f(x)$ и $\varphi_n(x) F_n(x)$

$$f(x) = \sum_k C_k F_k(x), \quad \varphi_n(x) F_n(x) = \sum_k B_{nk} F_k(x),$$

где B_{nk} и C_k определяются из соотношений

$$B_{nk} = \int_a^b \varphi_n(x) F_n(x) F_k(x) dx, \qquad C_k = \int_a^b f(x) F_k(x) dx. \tag{3}$$

Подставляя теперь ряды для $f(x)$ и $\varphi_n(x) F_n(x)$ в равенство (2) и приравнивая коэффициенты при $F_k(x)$ в обеих частях этого равенства, получим систему [2]

$$\sum_n A_n \int_a^b \varphi_n(x) F_n(x) F_k(x) dx = \int_a^b f(x) F_k(x) dx \tag{4}$$

или

$$\sum_n A_n B_{nk} = C_k. \tag{5}$$

Если удастся определить значения A_n, удовлетворяющие системе (4), причем такие, что ряд в левой части (2) сходится к не-

которой непрерывной функции $\tilde{f}(x)$, и если при этом окажется, что допустимо почленное интегрирование ряда (2), то сумма этого ряда $\tilde{f}(x) = f(x)$ [I].

Преобразуем систему (4) для определения A_n в явном виде. Умножая обе части системы (4) на величину $\int_a^b F_k(x) dx$ и суммируя по k, получим

$$\sum_k \sum_n A_n \Big(\int_a^b \varphi_n F_n F_k dx\Big)\Big(\int_a^b F_k dx\Big) = \sum_k \Big(\int_a^b f F_k dx\Big)\Big(\int_a^b F_k dx\Big).$$

Меняя порядок суммирования в левой части этого равенства и используя соотношения

$$\begin{aligned} \int_a^b f dx &= \sum_k \Big(\int_a^b f F_k dx\Big)\Big(\int_a^b F_k dx\Big) = \sum_k \Big(\int_a^b f_1 F_k dx\Big)\Big(\int_a^b f_2 F_k dx\Big), \\ \int_a^b \varphi_n F_n dx &= \sum_k \Big(\int_a^b \varphi_n F_n F_k dx\Big)\Big(\int_a^b F_k dx\Big), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$f(x) = f_1(x) f_2(x), \tag{7}$$

получаем

$$\sum_n A_n \int_a^b \varphi_n F_n dx = \int_a^b f dx. \tag{8}$$

Таким образом, найденные из равенства (8) A_n будут удовлетворять и системе (4), и равенству (2).

Используя первое соотношение из (7), легко увидеть, что набор коэффициентов

$$A_n = \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)}{\int_a^b \varphi_n F_n dx} \tag{9}$$

удовлетворяет равенству (8). Из выражений (7) и (9) видно, что коэффициенты разложения неоднозначны, что является следствием из неортогональности системы функций $\{\varphi_n F_n\}$.

Таким образом, ряд (2) с коэффициентами (9) будет иметь вид

$$f(x) = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)}{\int_a^b \varphi_n F_n dx} \varphi_n(x) F_n(x) . \tag{10}$$

Можно показать, что A_n, определяемые формулой (9), удовлетворяют равенству

$$\sum_n A_n \int_a^b \varphi_n F_n \Psi(x) dx = \int_a^b f \Psi(x) dx, \tag{11}$$

где $\Psi(x)$ - непрерывная функция в $[a, b]$, что равносильно системе (4). Действительно, умножая обе части равенства (4) на $\int_a^b \Psi(x) F_k dx$ и суммируя по k, аналогично выражению (8), получим равенство (11). С другой стороны, представляя интеграл в правой части равенства (11) в виде бесконечного ряда, будем иметь

$$\sum_n A_n \int_a^b \varphi_n F_n \Psi dx = \sum_n \left(\int_a^b f F_n dx\right)\left(\int_a^b \Psi F_n dx\right),$$

откуда видно, что A_n', имеющее значение,

$$A_n = \frac{\left(\int_a^b f F_n dx\right)\left(\int_a^b \Psi F_n dx\right)}{\int_a^b \Psi \varphi_n F_n dx} \tag{12}$$

удовлетворяет равенству (11). Таким образом, равенству (11) удовлетворяют коэффициенты, определяемые (9) и (12). Подставляя эти значения в равенство (11), получим

$$\int_a^b f \Psi dx = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)\left(\int_a^b \Psi \varphi_n F_n dx\right)}{\int_a^b \varphi_n F_n dx} \tag{13}$$

и

$$\int_a^b f \Psi dx = \sum_n \frac{\left(\int_a^b \Psi F_n dx\right)\left(\int_a^b f F_n dx\right)\left(\int_a^b \Psi \varphi_n F_n dx\right)}{\int_a^b \Psi \varphi_n F_n dx} . \tag{13^I}$$

Сравнение этих двух выражений показывает, что суммы в правой части (13) и (13)^I равны, несмотря на разные коэффициенты рядов (см.ниже). Следовательно, с функциями, свободными от индекса суммирования, можно обращаться так, как с постоянными. Таким же свойством обладают функции и в обычных разложениях Фурье.

Исходя из этих интегральных соотношений, напишем разложения для произведения функций $f\Psi$

$$f\Psi=\sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 \Psi F_n dx\right)\varphi_n(x)F_n(x)}{\int_a^b \varphi_n F_n dx} \tag{14}$$

В частном случае, когда $\varphi_n(x)=\varphi(x)$ принимая $f_1(x)=\varphi(x)$, из (7) $f_2=f\varphi^{-1}$ получаем соотношение

$$f\Psi=\sum_n\left(\int_a^b f\Psi\varphi^{-1}F_n dx\right)\varphi(x)F_n(x),$$

которое совпадает с обычным разложением по ортогональным функциям. Докажем, что обратная матрица системы (5) неоднозначна. Сущность этого доказательства заключается в нахождении A_n из системы (5) с помощью обратной матрицы $\hat B^{-1}$, которую мы находим, используя соотношение

$$\hat B\hat B^{-1}=\hat B^{-1}\hat B=E_\infty, \tag{15}$$

где $B_{nk}=\int_a^b\varphi_n F_n F_k dx$, E_∞ – бесконечномерная единичная матрица.

Определим элементы искомой матрицы B^{-1}_{nk} следующим образом:

$$B^{-1}_{nk}=\frac{\left(\int_a^b\eta^{-1}(x)F_n dx\right)\left(\int_a^b\eta(x)F_kF_ndx\right)}{\int_a^b\varphi_kF_kdx}, \tag{16}$$

где $\eta(x)$ – любая функция, не принадлежащая системе $\{F_n\}$.

Вычислим элементы произведения матриц $\hat B\hat B^{-1}$ и $\hat B^{-1}\hat B$, обозначая их через C_{km}:

$$C_{km}=\sum_j^\infty B^{-1}_{kj}B_{jm}=\sum^\infty \frac{\left(\int_a^b\eta^{-1}F_jdx\right)\left(\int_a^b\eta F_kF_jdx\right)\left(\int_a^b F_m\varphi_jF_jdx\right)}{\int_a^b\varphi_jF_jdx}=$$

$$=\sum_j\frac{\left(\int_a^b F_mF_jdx\right)\left(\int_a^b F_kF_jdx\right)\left(\int_a^b\varphi_jF_jdx\right)}{\int_a^b\varphi_jF_jdx}=\delta_{km}$$

и

$$C_{km}=\sum_j B_{kj}B^{-1}_{jm}=\sum_j\frac{\left(\int_a^b\varphi_kF_kF_jdx\right)\left(\int_a^b\eta^{-1}F_jdx\right)\left(\int_a^b\eta F_mF_jdx\right)}{\int_a^b\varphi_mF_mdx}=$$

$$=\sum_j\frac{\left(\int_a^b\varphi_kF_jdx\right)\left(\int_a^b F_kF_jdx\right)\left(\int_a^b F_mF_jdx\right)}{\int_a^b\varphi_mF_mdx}=\frac{\left(\int_a^b\varphi_kF_mdx\right)\delta_{km}}{\int_a^b\varphi_mF_mdx}=\delta_{km}$$

Как видно, определенная нами матрица удовлетворяет соотношениям (15); это означает, что она является обратной матрицей $\hat B$. Далее, умножим обе части системы (5) на B^{-1}_{km} и просуммируем по K, получим

$$\sum_{k,n}A_n\frac{\left(\int_a^b\varphi_nF_nF_kdx\right)\left(\int_a^b\eta^{-1}F_kdx\right)\left(\int_a^b\eta F_mF_kdx\right)}{\int_a^b\varphi_mF_mdx}=\sum_k\frac{\left(\int_a^b fF_kdx\right)\left(\int_a^b\eta^{-1}F_kdx\right)\left(\int_a^b\eta F_mF_kdx\right)}{\int_a^b\varphi_mF_mdx}.$$

[Ме]няя порядок суммирования левой части этого равенства, увидим, что она равна A_m. Действительно,

$$\sum_{n,k} A_n \frac{\left(\int_a^b F_n F_k dx\right)\left(\int_a^b \varphi_n F_k dx\right)\left(\int_a^b F_m F_k dx\right)}{\int_a^b \varphi_m F_m dx} = \sum_n A_n \frac{\left(\int_a^b F_n F_m dx\right)\left(\int_a^b \varphi_n F_m dx\right)}{\int_a^b \varphi_m F_m dx} = A_m$$

Следовательно,

$$A_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\int_a^b f F_k dx\right)\left(\int_a^b \eta^{-1} F_k dx\right)\left(\int_a^b \eta F_m F_k dx\right)}{\int_a^b \varphi_m F_m dx} = \sum_k \frac{\left(\int_a^b f_1 F_k dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_k dx\right)\left(\int_a^b F_m F_k dx\right)}{\int_a^b \varphi_m F_m dx},$$

откуда

$$A_m = \frac{\left(\int_a^b f_1 F_m dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_m dx\right)}{\int_a^b \varphi_m F_m dx}, \qquad (17)$$

что совпадает с выражением (9) для A_n. Из формулы (17) видно, что в отличие от матриц конечного порядка, обратная матрица системы, содержащая неортогональные функции, неоднозначна.

Приведем несколько примеров, где применяется неоднозначность коэффициентов разложения.

1. Напишем систему (4) с коэффициентом (9), полагая в ней $f_2 = 1$.

$$\sum_n \frac{\left(\int_a^b f F_n dx\right)\left(\int_a^b F_n dx\right)\left(\int_a^b F_k \varphi_n F_n dx\right)}{\int_a^b \varphi_n F_n dx} = \int_a^b f F_k dx \qquad (18)$$

Записав левую часть в виде

$$\sum_n \frac{\left(\int_a^b f F_n dx\right)\left(\int_a^b F_k F_n dx\right)\left(\int_a^b \varphi_n F_n dx\right)}{\int_a^b \varphi_n F_n dx},$$

(см.(13) и (13^{I})), увидим, что левая часть равна $\int_a^b f F_k dx$

2. Умножим равенство (10) на $\Psi(x)$.

$$\Psi(x) f(x) = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)\Psi(x)\varphi_n(x)F_n(x)}{\int_a^b \varphi_n F_n dx}. \qquad (19)$$

Сравнивая с выражением (14), видим, что $\Psi(x)$ можно вынести из под интегралов у членов ряда (14). Используя это свойство, разложим в ряд функцию $\varphi(x) = \eta(x)\varphi_m(x)F_m(x)$ по формуле (10), принимая в ней $f_2 = 1$:

$$\varphi(x) = \sum_n \frac{\left(\int_a^b \eta \varphi_m F_m F_n dx\right)\left(\int_a^b F_n dx\right)\varphi_n(x) F_n(x)}{\int_a^b \varphi_n F_n dx} =$$

$$= \sum_n \frac{\left(\int_a^b \varphi_m F_m F_n\,dx\right)\left(\int_a^b F_n\,dx\right)\eta(x)\varphi_n(x)F_n(x)}{\int_a^b \varphi_n F_n\,dx} =$$

$$= \sum_n \frac{\left(\int_a^b \varphi_m F_n\,dx\right)\left(\int_a^b F_m F_n\,dx\right)\eta(x)\varphi_n(x)F_n(x)}{\int_a^b \varphi_n F_n\,dx} = \eta\varphi_m F_m \;. \qquad (20$$

Из приведенного примера, легко заметить, что если разлагается в ряд функции из системы $\{F_n(x)\}$, в таком виде, как в примере, то не всякая перестановка функций приводит к правильному результату. Не допустимы только такие перестановки, в результате которых ряд становится конечным, без сокращения знаменателей членов ряда.

3. Представим $\int_a^b f\Psi\,dx$ в виде ряда двумя способами. Первый - по формуле (I3), принимая в ней $f_2 = I$, $\varphi_n(x) = \varphi(x)$ и второй по обычному разложению Фурье:

$$\int_a^b f\Psi\,dx = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f F_n\,dx\right)\left(\int_a^b F_n\,dx\right)\left(\int_a^b \Psi\varphi(x)F_n\,dx\right.}{\int_a^b \varphi(x)F_n\,dx}, \qquad (2I)$$

$$\int_a^b f\Psi\,dx = \sum_n \left(\int_a^b f\varphi^{-1}F_n\,dx\right)\left(\int_a^b \Psi\varphi F_n\,dx\right) \cdot \qquad (22)$$

Докажем, что они действительно равны. Для наглядности дальнейшего сравнения выражений (2I) и (22) умножим (22) на $\int_a^b F_n\,dx \big/ \int_a^b F_n\,dx = 1$ и напишем равенство

$$\sum_n \frac{\left(\int_a^b f\varphi^{-1}F_n\,dx\right)\left(\int_a^b F_n\,dx\right)\left(\int_a^b \Psi\varphi F_n\,dx\right)}{\int_a^b F_n\,dx} = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f F_n\,dx\right)\left(\int_a^b F_n\,dx\right)\left(\int_a^b \Psi\varphi F_n\,dx\right)}{\int_a^b \varphi F_n\,dx} \qquad (23)$$

Принимая здесь $\varphi(x) = \delta(x-\xi)$, $\xi \in [a,b]$ будем иметь

$$\sum_n \left(\int_a^b f\delta^{-1}(x-\xi)F_n\,dx\right)\Psi(\xi)F_n(\xi) = \sum_n \left(\int f F_n\,dx\right)\left(\int_a^b F_n\,dx\right)\Psi(\xi)$$

или

$$\sum_n \left(\int_a^b \delta^{-1}(x-\xi)F_n(x)\,dx\right)F_n(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (24)$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в (24), получим

$$\int_a^b f(x)\,\delta^{-1}(x-\xi)\left[\sum_n F_n(x)F_n(\xi)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Используя известное соотношение

$$\sum_n F_n(x)F_n(\xi) = \delta(x-\xi)$$

получим тождество.

Теперь получим равенство, которое является обобщением равенства Парсеваля.

Принимая в выражении (I3) $\varphi(x) = 1$, $\Psi(x) = f_3(x)$, имеем

$$\int_a^b f_1 f_2 f_3\,dx = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n\,dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n\,dx\right)\left(\int_a^b f_3 F_n\,dx\right)}{\int_a^b F_n\,dx}. \qquad (25)$$

Напишем его в общем виде

$$\int_a^b f_1 f_2 \cdots f_k\,dx = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)\cdots\left(\int_a^b f_k F_n dx\right)}{\left(\int_a^b F_n dx\right)^{k-2}} . \qquad (26)$$

При $K = 1$, имеем представление $\int_a^b f_1(x)\,dx$ в ряд.
При $K = 2$ - равенство Парсеваля:

$$\int_a^b f_1 f_2\,dx = \sum_n \left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)$$

и т.д., если $\int_a^b F_n dx \neq 0$

Если неортогональная система имеет вид $\Psi_n(x)$, в полученных формулах надо вместо $\varphi_n(x) F_n(x)$ положить $\Psi_n(x)$. Полученные формулы не зависят от вида неортогональных функций. Для первого примера необходимо представить неортогональные функции в виде $\Psi_n(x) = \Psi_n(x) F_n(x)/F_n(x)$, потом продолжать так, как выше, например, матрицы системы (5) будут

$$B_{nk} = \int_a^b \Psi_n F_k dx , \qquad B^{-1}_{nk} = \frac{\left(\int_a^b \eta^{-1} F_n dx\right)\left(\int_a^b \eta F_k F_n dx\right)}{\int_a^b \Psi_k dx}$$

Разложение функции в ряд будет иметь вид

$$f(x) = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)}{\int_a^b \Psi_n dx} \Psi_n(x) , \qquad (28)$$

если $\Psi_n(x) \neq 0$ в промежутке $[a, b]$.

Действительно, допустим, что правая часть сходится не к $f(x)$, а к некоторой функции $U(x) \neq f(x)$. В этом случае будем иметь

$$U(x) = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)}{\int_a^b \Psi_n dx} \Psi_n(x) . \qquad (29)$$

Тогда будет существовать функция $V(x)$, такая, что

$$uv = f(x) = f_1(x) f_2(x) . \qquad (30)$$

Умножим обе части выражения (29) на $V(x)$ и проинтегрируем в пределах a, b, получим

$$\int_a^b uv\,dx = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)\left(\int_a^b v \Psi_n dx\right)}{\int_a^b \Psi_n dx} . \qquad (31)$$

Теперь представим $\int_a^b uv\,dx$ в виде ряда по формуле Парсеваля:

$$\int_a^b uv\,dx = \sum_n \left(\int_a^b u F_n dx\right)\left(\int_a^b v F_n dx\right).$$

Учитывая (30) последнее выражение запишем в виде

$$\int_a^b uv\,dx = \sum_n \frac{\left(\int_a^b f_1 F_n dx\right)\left(\int_a^b f_2 F_n dx\right)\left(\int_a^b v \Psi_n dx\right)}{\int_a^b v \Psi_n dx} . \qquad (32)$$

Из равенства выражений (31) и (32) следует, что $\int_a^b \Psi_n (v-1)\,dx = 0$ откуда $V(x) = 1$, т.е. $U(x) = f(x)$

Для примера допустим, что $\Psi_n(x) = x^n$. Разложим в ряд функцию вида $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, тогда имеем

$$\varphi(x)=\sum_{n,k}\frac{a_k\left(\int_a^b x^k F_k^{-1}F_k F_n\,dx\right)\left(\int_a^b F_n\,dx\right)x^n}{\int_a^b x^n\,dx}=$$

$$=\sum_{n,k}\frac{a_k\left(\int_a^b F_k F_n\,dx\right)\left(\int_a^b x^k F_k^{-1}F_n\,dx\right)x^n}{\int_a^b x^n\,dx}=\sum_k a_k x^k$$

В выражении (28) коэффициенты разложения содержат не только $f(x)$, но и другие функции, не связанные с $f(x)$, и , естественно, что из разложения по неортогональным функциям невозможно получить, например, разложение Тейлора.

Что касается условий, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы ее можно было разложить в ряд по неортогональным функциям, то эти условия определяются конкретными видами функций, входящих в коэффициенты разложения.

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору С.Г. Матиняну за ценные и критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1950, с.695.

2. Бабаян В.Х., Багдасарян М.Б. Аналитическое решение стационарного уравнения диффузии галактических космических лучей в межпланетном пространстве. Изв.АН СССР, сер.физ.1987 , т.51, вып.2.

Рукопись поступила 29 января 1987 г.