ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ–ТФ–10(70)

И.И.Гольдман

ВЕКТОР–МАТРИЧНЫЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

АРУС

ԵՐԵՎԱՆ 1970 ЕРЕВАН

В теории гравитации используется в качестве основной полевой величины вместо тензора g_{ik} вектор, образуемый двухрядными матрицами специального вида. Это приводит к расширению группы инвариантности, которая теперь помимо общих преобразований координат включает группу унимодулярных преобразований. Дается формулировка теорий, отличных от Эйнштейновской, в том числе и теорий гравитации с нарушением СР.

Развитый формализм удобен для описания взаимодействия электрона и нейтрино с сильным гравитационным полем.

§ I Введение

В настоящей работе предлагается формулировка теорий гравитации, которые подобно классической Эйнштейновской теории относительности обладают свойством общей ковариантности, но в отличие от нее не используют метрический тензор в качестве основной полевой величины. Как будет видно рассматриваемые теории особенно приспособлены для учета взаимодействия с сильным гравитационным полем спинорных частиц. В принципе задача о движении спинорной частицы в гравитационном поле разбивается обычно на две части : во-первых надо найти (решая уравнения общей теории относительности) метрический тензор и во-вторых построить матрицы $\gamma_i(x)$, удовлетворяющие соотношениям антикоммутации с $g_{ik}(x)$ в правой части. Последняя операция может представить трудности как практические, так и принципиальные (однозначность $\gamma_i(x)$ во всем пространстве).

Характерной особенностью излагаемой ниже формуровки является выбор в качестве фундаментальной полевой величины вектор-матриц $f_i(x)$, представляющих собой четверку комплексных 2x2 матриц и образующих ковариантный вектор. Физическая интерпретация обеспечивается следующим выражением метрического тензора g_{ik} через f_i

$$g_{ik} = \frac{1}{2}\, Tr\ f_i^{*} f_k \qquad (1)$$

Уравнения для $f_i(x)$ также, как и приведенное выражение для $g_{ik}(x)$ инвариантны по отношению к преобразованиям вида

$$f_i'(x) = L^{*} f_i(x) L^{-1}, \qquad (2)$$

где L - унимодулярная, не зависящая от координат, комплексная 2x2 матрица.

Вначале мы рассматриваем общековариантные теории, формулируемые в терминах f_i, и обладающие свойством L - инвариантности, причем L не зависит от координат. Произвол в лагранжиане полностью устраняется, если потребовать, чтобы уравнения были инвариантны относительно $L(x)$- преобразования, произвольно зависящего от координат.

§ 2. Алгебраическое условие и свойства f_i

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые существенные для дальнейшего алгебраические свойства f_i. Как уже упоминалось f_i (i = I,2,3,0) представляют собой двухрядные квадратные матрицы. Определим для произвольной такой матрицы линейную операцию

$$\hat{F} = I \cdot Tr\, F - F, \qquad (3)$$

где I - единичная матрица. Операция $\wedge$ обладает следующими свойствами:

$$\hat{\hat{F}} = F,\quad \widehat{FG} = \hat{G}\hat{F},\quad \widehat{FGH} = \hat{H}\hat{G}\hat{F}, \dots$$

$$\hat{I} = I,\quad F\hat{F} = \hat{F}F = det\, F \cdot I. \qquad (4)$$

(под FG понимается матричное произведение двухрядные F и G). Являясь линейной, операция $\wedge$ имеет смысл и в том случае, когда элементы матриц не коммутируют. Ее свойства близки к свойствам операции взятия обратной матрицы F^{-1}, но ее использование имеет то преимущество, что нет необходимости предполагать, что $det\, F$ отличен от нуля, нет нужды даже предполагать, что элементы матрицы являются с - числом).

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать матрицы f_i, удовлетворяющие следующему алгебраическому условию

$$\hat{f}_i = -f_i^{*} \qquad (5)$$

Благодаря этому ограничению для задания $f_i(x)$ нужно I6 (а не 32) вещественных функций.

Из условия (5) вытекают два важных для дальнейшего следствия. Прежде всего преобразование $f_i \to f_i'$,

$$f_i = L^{*} f_i' \hat{L}, \qquad (6)$$

где комплексная матрица L нормирована условием $L\hat{L} = I$ (это условие унимодулярности устраняет лишние параметры в L, фактически не меняющие f_i), оставляет неизменным алгебраическое условие (5). Второе следствие состоит в том, что выражение $f_i^{*} f_k + f_k^{*} f_i$ пропорционально единичной матрице, в чем легко убедиться, если заметить, что необходимое и достаточное условие того, чтобы матрица $F \sim I$ можно записать в виде $F = \hat{F}$

Таким образом

$$f_i^* f_k + f_k^* f_i = 2 g_{ik} \cdot I \qquad (7)$$

причем это соотношение, а также вытекающее отсюда следствие

$$g_{ik} = \frac{1}{2} \, Tr \, f_i^* f_k \qquad (I)$$

инвариантны относительно L – преобразования.

Можно доказать, что скалярная плотность

$$e^{ikem} f_i^* f_k f_e^* f_m \qquad (8)$$

пропорциональна единичной матрице и $\Delta = \frac{i}{4!} e^{ikem} \frac{1}{2} Tr f_i^* f_k f_e^* f_m = \sqrt{-g}$, где g – детерминант g_{ik}. Можно показать также, что если $\Delta \neq 0$ то матрицы f_i линейно-независимы и образуют полную систему матриц.

Последние формулы наводят на мысль об аналогии между f_i и ψ – функцией в квантовой механике. Так, преобразование (6) аналогично фазовому преобразованию ψ. Можно ожидать, что подобно ψ – функции f_i не измеряются и непосредственный физический смысл имеет билинейный в f_i метрический тензор g_{ik}. Возможность отождествить g_{ik} с метрическим тензором помимо общей структуры (симметрия, вещественность) основана еще на том, что из (5) следует автоматически правильная сигнатура g_{ik} (+++–).

§ 3. Постоянные f_i и общековариантное условие строгой эвклидовости.

Прежде чем переходить к уравнениям поля в терминах f_i рассмотрим простейшее физически возможное состояние: свободное от гравитационного поля пространство. Такому состоянию можно поставить не зависящие от координат f_i. Однако условие $f_i = const$ не является общековариантным. Чтобы охарактеризовать такое поле ковариантно, запишем следующие уравнения

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^i} = 0, \quad \hat{f}_i = - f_i^* \qquad (9)$$

Эти уравнения не меняют свой вид при произвольных преобразованиях координат. Из первого уравнения следует, что f_i является градиентом некоторой скалярной матрицы φ : $f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ при этом благодаря второму уравнению можно считать, что $\hat{\varphi} = -\varphi^*$. Теперь видно, что подходящим преобразованием координат (а именно, выбрев элементы матрицы φ или их вещественные линейные комбинации в качестве новых координат) можно привести f_i к константам.

Отметим, что ковариантные условия (9) являются более жесткими, чем обычное требование $R_{ikem} = 0$ означающее, что подходящим преобразованием координат можно сделать постоянными g_{ik}. Условия (9) поэтому можно назвать условиями строгой эвклидовости. Кстати, можно показать, что условие $f^{*k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^i}\right) = 0$ полностью эквивалентно требованию $\frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^i} = 0$.

Условия строгой эвклидовости очевидно, инвариантны относительно L – преобразований (но не $L(x)$ – преобразований !) и имеют очень простой вид по сравнению с обычным (слабым) условием эвклидовости $R_{ikem} = 0$, содержащим вторые производные g_{ik}. Очевидно, что уравнение гравитации в терминах f_i должны представлять собой ослабление условий строгой эвклидовости, т.е. они должны автоматически удовлетворяться, если справедливы уравнения (9).

В дальнейшем предполагается, что второе из условий (9) сохраняется в случае произвольного гравитационного поля. Это дает возможность сохранять группу $L(=const)$- преобразований. Наша задача состоит, таким образом, в том, чтобы ослабить подходящим способом первое (дифференциальное) условие строгой эвклидовости.

§ 4. Лагранжианы L - инвариантных теорий.

Перейдем к формулированию уравнений, которые инвариантны относительно группы общих преобразований координат, а также группы $L(=const)$ - преобразований (не затрагивающих координат). При этом в качестве основных полевых величин будем рассматривать вектор-матрицы $f_i(x)$, удовлетворяющие алгебраическому условию $\hat{f}_i = -f_i^*$.

Существенное упрощение, возникающее в связи с выбором в качестве основного поля f_i вместо g_{ik} состоит в том, что теперь в нашем распоряжении имеется общековариантная операция дифференцирования, а именно $\frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^i}$. Благодаря этому можно сконструировать общековариантные лагранжианы квадратичные в первых производных f_i. При этом уравнения будут линейны относительно вторых производных f_i (но, конечно, они могут быть нелинейны относительно f_i).

Примером возможного лагранжиана может служить

$$\mathcal{L}_1 = \Delta^{-1} e^{ikem} e^{pgrs} \langle f^*_{i,k} f_r \rangle \langle f^*_{p,q} f_e \rangle \langle f_m^* f_s \rangle , \qquad (10)$$

здесь $\langle F \rangle = \frac{1}{2} T_r F$, $\Delta = \frac{i}{4!} e^{ikem} \langle f_i^* f_k f_e^* f_m \rangle$, $f_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial x^k}$

Как легко убедиться, $\mathcal{L}_1$ инвариантно относительно $L = const$

-преобразований, вещественно и $\int \mathcal{L}_1 d^4x$ -инвариант при общих преобразованиях координат ввиду антисимметризации по индексам (ik) и (p,q).

Можно было бы выписать довольно большое число выражений подобных $\mathcal{L}_1$. Некоторые из них, однако является линейными комбинациями других. Чтобы отыскать все различные возможные лагранжевы плотности поступим следующим образом. Представим $f_{i,k}$ в виде

$$f_{i,k} = \gamma^a_{\underset{\sim}{ik}} f_a , \qquad (11)$$

где $\gamma^a_{\underset{\sim}{ik}}$ - числовые функции координат. В этом разложении по полной системе матриц (преполагаем, что Δ отлично от нуля) , величины $\gamma^a_{\underset{\sim}{ik}}$ вещественны как это следует из алгебраического условия. Очевидно, что тензором является лишь антисимметричная часть $\gamma^a_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(\gamma^a_{\underset{\sim}{ik}} - \ ^a_{\underset{\sim}{ki}})$, а симметричная часть $\gamma^a_{\underline{ik}}$ преобразуется, подобно $\ _{\underset{\sim}{ik}}$, в точности так же как коэффициенты афинной связанности. Можно показать, что при выполнении (I) имеется следующая связь с символами Кристофеля Γ^s_{im} :

$$g_{es} \Gamma^s_{ik} = \gamma_{e\underline{ik}} + \gamma_{k\underset{\vee}{ei}} + \gamma_{i\underset{\vee}{ek}} \qquad (12)$$

Введем наряду с $\gamma^a_{\underset{\vee}{ik}} \equiv \gamma^a_{ik}$ • величину

$$\Delta^a_{em} = e^{ikem} \gamma^a_{ik} , \qquad (13)$$

которая преобразуется как тензорная плотность. Тогда $\mathcal{L}_1$ можно записать в виде

$$\mathcal{L}_1 = \Delta^{-1} \Delta^{ike} \Delta_{kie} \qquad (14)$$

Выпишем теперь сконструированные из γ и Δ квадратичные в первых производных f_i скалярные плотности, которые можно взять в качестве лагранжианов:

$$\mathcal{L}_2 = \Delta^{-1}\Delta^{ike}\Delta_{ike}, \quad \mathcal{L}_3 = \Delta^{-1}\Delta^{k}_{ke}\Delta_i^{\;il} \qquad (15)$$

$\mathcal{L}_{1,2,3}$ при замене $f_i \to f_i^*$ меняют знак (при такой замене Δ^{ike}, γ^{ikl} и g_{ik} не меняются, а Δ меняет знак). Три другие лагранжиана не меняются при такой замене, именно

$$\mathcal{L}_4 = \Delta^{ike}\gamma_{kie}, \quad \mathcal{L}_5 = \Delta^{ike}\gamma_{ike}, \quad \mathcal{L}_6 = \Delta^{r}_{\;re}\gamma_i^{\;il} \qquad (16)$$

Все $\mathcal{L}$ вещественны и лагранжиан общего вида является линейной комбинацией $\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_6$ с вещественными коэффициентами.

Можно выразить лагранжианы через γ^a_{ik}.

Пользуясь соотношением

$$e^{ikem}e^{pqrs}g_{er}g_{ms} = -2\Delta^2(g^{ip}g^{kq} - g^{iq}g^{kp}), \qquad (17)$$

найдем $\mathcal{L}_2$:

$$\Delta\mathcal{L}_2 = \Delta^{alm}\Delta_{alm} = e^{ikem}e^{pqrs}\gamma^a_{\;ik}\gamma^b_{\;pq}g_{ab}g_{er}g_{ms} \qquad (18)$$

откуда получаем

$$\mathcal{L}_2 = -4\gamma^{ike}\gamma_{ike} \qquad (19)$$

Подобно этому находим

$$\mathcal{L}_1 = -2\Delta(\gamma^{ike} - 2\gamma^s_{\;si}\gamma_r^{\;ri})$$
$$\mathcal{L}_3 = -2\Delta(\gamma^{ike}\gamma_{ike} - 2\gamma^{ike}\gamma_{kie}) \qquad (20)$$

$\mathcal{L}_{1\dots6}$ можно записать непосредственно через f_i (см.например (10)). В частности $\mathcal{L}_5$ можно представить в виде

$$\mathcal{L}_5 = e^{ikem}\langle f^*_{i,k}\, f_{e,m}\rangle, \qquad (21)$$

откуда следует, что $\mathcal{L}_5$ имеет вид дивергенции.

Выразим непосредственно через f_i другие лагранжианы

$$\mathcal{L}_2 = \Delta^{-1}e^{ikem}e^{pqrs}\langle f^*_{i,k}f_{pq}\rangle\langle f^*_e f_r\rangle\langle f^*_m f_s\rangle, \qquad (22)$$
$$\mathcal{L}_3 = \Delta^{-1}e^{ikem}e^{pqrs}\langle f^*_{i,k}f_e\rangle\langle f_{p,q}f_r\rangle\langle f^*_m f_s\rangle$$

§ 5. Общая теория относительности в терминах f_i.

Рассмотрим более сильное требование, а именно требование инвариантности относительно преобразований $L(x)$ зависящих от координат произвольно. Ниже будет показано, что простейшая $L(x)$ - инвариантная теория эквивалента общей теории относительности.

Введем вспомогательное "спинорное поле" ψ, имеющее вид квадратной комплексной матрицы 2x2, и предположим, что ψ не меняется при преобразованиях координат, а при L преобразовании переходит в ψ' $(\psi = L\psi')$.

Поскольку производная $\psi_{,i} = L_{,i}\psi + L\psi_{,i}$ теперь не преобразуется столь же просто как при $L = const$, введем L - ковариантную производную

$$\psi_{/i} = \psi_{,i} - S_i\psi, \qquad (23)$$

где S_i - комплексная вектор-матрица, и потребуем, чтобы $\psi_{/i} = L(\psi'_{/i})$. Отсюда получаем закон преобразования

(24)

Поскольку $\hat{\psi}_1 \psi_2$ не меняется при $L(x)$ – преобразовании, то – ковариантное и обычное дифференцирование должно приводить к одинаковому результату, откуда находим $Tr\, S_i = 0$ (можно провести аналогию между этим условием и симметрией Γ^s_{ik} по нижним индексам в g_{ik} – теории). Легко доказать, что это условие не противоречит закону преобразования S_i, поскольку $Tr\, L_{,i}\hat{L} = (\det L)_{,i}$ – следствие унимодулярности $L(x)$.

Величины S_i будут определены однозначно, если потребовать, чтобы

$$f_{i,k} - \Gamma^{\ell}_{ik} f_{\ell} - S^*_k f_i + f_i S_k = 0, \qquad (25)$$

где Γ^{ℓ}_{ik} симметричны по нижним индексам. Γ^{ℓ}_{ik}, как можно отсюда показать, совпадают с символами Кристоффеля (см. (12)).

Теперь легко убедиться, что ковариантная производная вектора $A_i = \hat{\psi}_1^* f_i \psi_2$, не меняющая при $L(x)$ – преобразовании имеет вид обычный (что оправдывает обозначение (23):

$$A_{i;k} = A_{i,k} - \Gamma^{\ell}_{ik} A_{\ell}.$$

Из условия (25) можно выразить S_i явно через f_i и их первые производные. Для этого возьмем от левой части (25) антисимметричную часть по индексам i, k и воспользуемся следующими соотношениями

$$f^i Q f_i = 2\hat{Q}, \quad f^{*i} Q f_i = 2\,Tr\, Q \cdot I, \quad f^{*i} f_i = 4 \qquad (26)$$

Введя обозначение

$$S = f^k S_k \qquad (27)$$

(S преобразуется как f_i, но с добавочным слагаемым при $L(x)$ – преобразовании и является скаляром при преобразовании координат) находим

$$S_i = f^{*k} f_{\underset{\vee}{i,k}} - \frac{1}{2}\left(S^* f_i + f_i^* S\right). \qquad (28)$$

Далее находим отсюда

$$S = \frac{1}{4} f^i \left(2 f^{*k} f_{\underset{\vee}{i,k}} + f^*_{\underset{\vee}{i,k}} f^k\right), \qquad (29)$$

и тем самым найдено выражение S_i через f_i.

Рассмотрим теперь коммутатор двух L – ковариантных производных

$$\psi_{/\ell/m} - \psi_{/m/\ell} = (S_{m,\ell} - S_{\ell,m} + S_m S_\ell - S_\ell S_m)\psi = \rho_{\ell m}\psi \qquad (30)$$

Величина $\rho_{\ell m}$ при $L(x)$ – преобразовании преобразуется следующим образом

$$\rho_{\ell m} = L\, \rho'_{\ell m}\, \hat{L} \qquad (31)$$

и обладает свойствами

$$\rho_{\ell m} = -\rho_{m\ell}, \quad Tr\, \rho_{\ell m} = 0, \quad e^{ik\ell m}(f_k \rho_{\ell m} - \rho^*_{\ell m} f_k) = 0 \qquad (32)$$

Легко подсчитать число независимых компонент $\rho_{\ell m}$; оно равно 20. Связь $\rho_{\ell m}$ с тензором кривизны $R^i_{k\ell m}$ устанавливается, если рассмотреть вектор $A_k = \hat{\psi}_1^* f_k \psi_2$. Имеем

$$\rho_{\ell m} = \frac{1}{4} R_{sk\ell m} f^{*k} f^s, \quad R_{ik\ell m} = Re\, Tr\, f_i^* f_k \rho_{\ell m} \qquad (33)$$

Для скалярной кривизны можно получить следующее выражение

$$\sqrt{-g}\, R = e^{ik\ell m}\, \Im m \langle f_i^* f_k \rho_{\ell m} \rangle, \qquad (34)$$

содержащее вторые производные f_i линейно. Выделение дивергенции дает тождество

$$\sqrt{-g}\; R = \mathcal{L}_1 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_3 + 4\frac{\partial}{\partial x^e}\left(\Delta\gamma^e\right), \quad \gamma^e \equiv \gamma_k{}^{ke}, \tag{35}$$

откуда заключаем, что лагранжиан $\mathcal{L}_1 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_3$, представляющий собой скалярную плотность, квадратичную в первых производных f_i приводит к $L(x)$ – инвариантным уравнениям (хотя сам он не инвариантен при $L(x)$ – преобразованиях) и эквивалентным уравнениям общей теории относительности.

Подчеркнем, что эта формулировка теории гравитации в терминах f_i, возможна лишь в мире с четырьмя измерениями и сигнатурой (+++–).

То обстоятельство, что уравнения для f_i вытекает из вариационного принципа обеспечивает существование решений $f_i(x)$, которые можно непосредственно использовать для записи уравнений движения частиц со спином, минуя этап нахождения дираковских матриц, исходя из метрического тензора g_{ik}.

Отметим также, что изложенная формулировка теории гравитации допускает введение в неэвклидовом пространстве дискретных преобразований, которые для случая плоского пространства переходят в операции координатных отражений СР и Т.

§ 6 Другие возможности

Требование $L(x)$ – инвариантности, как мы видели, приводит к теории эквивалентной общей теории относительности. Если, однако, ограничиться требованием инвариантности относительно $L = const$ преобразований, то можно взять в качестве лагранживой плотности линейную комбинацию $\mathcal{L}_{1\ldots6}$. Исследование решений центрально-симметричного случая показывает, что любой лагранжиан вида

$\mathcal{L}_1 + \alpha\mathcal{L}_3$, где α – произвольная постоянная приводит к одному и тому же решению; добавка $\mathcal{L}_2$ приводит к неправильному результату.

Интересная возможность возникает при добавлении к $\mathcal{L}_1 + \alpha\mathcal{L}_3$ добавки вида $\mathcal{L}_{4,6}$. Уравнения попрежнему имеют правильное центрально-симматричное решение, хотя формально лагранжиан такого вида не инвариантен относительно замены $f_i \to f_i^*$ (эта операция соответствует преобразованию СР).

Эти возможности обсуждаются подробно в другой работе автора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т.I,II, "Наука", М.1966.

Заказ 1206 а. Т-00046 Тираж 300

Множительно-копировальная станция Ереванского физического института, Ереван 36, Маркарина 2