ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ–ТФ–3(69)

В.А.Джрбашян

МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРОТОНА В НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИИ SU(6)

АРУС

ԵՐԵՎԱՆ 1969 ЕРЕВАН

Получены выражения для магнитной восприимчивости χ_p и поляризации f_p протона в схеме нарушенной симметрии $SU(6)$. При полях $H \ll 3\cdot 10^{19}$ гаусс эти выражения совпадают с соответствующими выражениями в $SU(2)$ и согласуются с экспериментом. При $H \gg 3\cdot 10^{19}$ гаусс и $\mu_p H/kT \to \infty$ в рассматриваемой теории намагничение протона $I_p = \chi_p H$ равно 1,52 $N\mu_p$, в то время как $SU(2)$ дает $N\mu_p$. Максимальное отклонение поляризации протона от предсказания $SU(2)$ составляет 3%.

Приведены также точные выражения для χ_p и f_p, получающиеся в ненарушенной $SU(6)$.

Из рассмотрения следует, что любые ненарушенные или нарушенные симметрии приведут, для максимального значения намагничения протона, достигающегося при насыщении, к величине отличной от $N\mu_p$, если в одном супермультиплете протон будет содержаться вместе с частицей, квантовые числа которого разрешают иметь магнитный момент переходе между ними.

Expressions for the magnetic susceptibility χ_p and polarization f_p of proton in the scheme of broken symmetry SU(6) are obtained. In the case of an external field of $H \ll 3.10^{19}$ gauss these expressions coincide with the corresponding ones in SU(2) and are in agreement with the experiment.

When $H \ll 3.10^{19}$ gauss and μ_p $H/kT \to \infty$ the magnetic moment per unit-volume $I_p = \chi_p H$ H for proton is 1.52 $N\mu_p$ in the theory under consideration, while SU(2) gives $N\mu_p$.

The maximal deviation of the proton polarization from the prediction of SU(2) is 3%.

The exact expressions for χ_p and f_p, obtained in unbroken SU(6) are also given.

The arbitrary broken or unbroken symmetries will bring to the magnitude differing from $N\mu_p$ for maximal value (reached in case of saturation) of the magnetic moment per unit-volume for proton, if in the same supermultiplet will containe the proton with another particle characterized by quantum numbers, allowing to have the transition magnetic moment between them.

I. Введение

В ненарушенной симметрии $SU(2)$ в соответствии с действительностью два состояния протона имеют одинаковую массу. В этой схеме, связанные с магнитным моментом протона, такие наблюдаемые величины как магнитная восприимчивость χ_p и поляризация f_p согласуются с результатами измерений при доступных на эксперименте ограниченных значениях магнитных полей.

В то же время эта простая симметрия не может предсказать значение магнитного момента перехода $\langle p|M_z|N^{*+}\rangle$, наблюденного на эксперименте. Для объяснения последнего необходимо привлечь более сложные симметрии.

Одним из естественных обобщений $SU(2)$ является $SU(6)$ симметрия. Она хорошо объясняет отношение магнитных моментов нейтрона и протона и ряд других эффектов, доступных измерению [I]. Однако количественного согласия с измеренным значением $\langle p|M_z|N^{*+}\rangle$ к настоящему моменту не получено.

Магнитная восприимчивость протона в схеме ненарушенной $SU(6)$ симметрии [2,3], в отличие от значения этой величины в схемах ненарушенных $SU(2)$ и $SU(3)$ симметрий, не согласуется с экспериментом. Поскольку массы 56 частиц, образующих известное представление барионов в $SU(6)$, разные, естественно, больше прав* на сравнение с экспериментом имеет нарушенная $SU(6)$, где эта разность учтена.

В параграфе 2 настоящей статьи рассмотрена магнитная восприимчивость протона в первом неисчезающем приближении по $\mu_p H/kT$ и $\mu_p H/(\mathfrak{M}_{N^{*+}} - \mathfrak{M}_p)$. Показано, что в нарушенной $SU(6)$ вклад резонанса N^{*+} пропорционален параметру $\mu_p H/(\mathfrak{M}_{N^{*+}} - \mathfrak{M}_p) = H/3 \cdot 10^{19}$. Таким образом в этой схеме получается согласие с измеренным значением[4] магнитной восприимчивости протона, поскольку при использованных полях этот параметр очень мал.

В параграфе 3 приведены точные выражения для магнитной восприимчивости и поляризации протона. При $\mu_p H \ll \mathfrak{M}_{N^{*+}} - \mathfrak{M}_p$ эти выражения в первом приближении совпадают с теми, что даёт $SU(2)$.

Отличие сложных симметрий от $SU(2)$ будет порядка вклада $SU(2)$ лишь при полях $\sim 3 \cdot 10^{19}$ гаусс.

В случае нарушенной $SU(6)$ при $H \gg 3 \cdot 10^{19}$ гаусс и $H\mu_p/kT \to \infty$ намагничение протона $I_p = \chi_p H$ получается в полтора раза больше его значения вычисленного в классике, $SU(2)$ и $SU(3)$ и соответствующего ориентации всех протонов по направлению магнитного поля.

---

* Отметим, однако, что малая поправка на разность масс в отношении μ_n/μ_p действует в сторону ухудшения согласия с экспериментом.

В параграфе 3 рассмотрена также поляризация протона во внешнем магнитном поле. Максимальное отличие этой величины в нарушенной $SU(6)$ от результата $SU(2)$ получается при $\mu_p H/kT = 1,5$ и равно 3%.

2. Магнитная восприимчивость протона в первом приближении

Тот факт что, частицы принадлежащие представлению 56 группы $SU(6)$ обладают разными массами в первом приближении учитывается добавлением в гамильтониан взаимодействия, оставляющего без изменения квантовые числа s, s_z, Y, I, I_z.

Следовательно, при вычислении магнитной восприимчивости [2,3] протона

$$\chi_p = \frac{N \sum_m \langle p,m | M_z \exp[-W/kT] | p,m \rangle}{H \sum_m \langle p,m | \exp[-W/kT] | p,m \rangle}, \tag{2.1}$$

в нарушенной симметрии $SU(6)$ в качестве волновых функций, мы должны использовать волновые функции ненарушенной симметрии $SU(6)$. Разность масс частиц проявится в двух выражениях.

1) В матричных элементах оператора магнитного момента

$$\langle p,m | M_z | p,m \rangle = \sqrt{3}\, \mu_p \langle \tfrac{1}{2} m, 10 | \tfrac{1}{2} m \rangle, \tag{2.2}$$

$$\langle p,m | M_z | N^{*+}_{,} m \rangle = \langle N^{*+}_{,} m | M_z | p,m \rangle = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \mu^{*} \langle \tfrac{3}{2} m, 10 | \tfrac{1}{2} m \rangle \tag{2.3}$$

фактор μ^* не совпадает с магнитным моментом протона μ_p. Связь между ними мы получим, следуя Бегу и Пайсу [5] предположив, что оператор M_z обратно пропорционален массе.

Однако в рассматриваемом случае магнитного момента перехода (2.3) эта связь однозначно * установится если принять

$$M_z = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{M}^{-1} M_z^{(o)} + M_z^{(o)} \mathfrak{M}^{-1}\right), \qquad (2.4)$$

где $\mathfrak{M}$ есть оператор массы, а $M_z^{(o)}$ оператор, совпадающий по своим трансформационным свойствам с оператором [2,3] проекции магнитного момента в ненарушенной SU (6).

Таким образом получим

$$\mu^* = \frac{\mathfrak{M}_p}{\frac{1}{2}(\mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_{N^{*+}})}\mu_p = 0{,}86\,\mu_p . \qquad (2.5)$$

Использованный при выводе (2.5) подход Бега и Пайса [5] допускает погрешность по крайней мере 2,5%.

Далиц и Сутерленд определили μ^* несколько иным путем. Предположив, что формфактор для магнитного момента перехода зависит от переданного импульса как магнитный формфактор нуклона, они нашли $\mu^* = 0{,}79\,\mu_p$. Это значение в пределах допущенных неточностей в обоих подходах близко к значению (2.5), которое и будет использовано в дальнейшем.

2) Более существенным является учет оператора массы в гамильтониане W.

---

* Этот вид необходим с целью сохранения эрмитовости:

$$\langle p, m | M_z | N^{*+}, m \rangle = \langle N^{*+}, m | M_z | p, m \rangle^* .$$

В нарушенной SU (6) мы должны писать

$$W = W_1 + W_2 , \qquad (2.6)$$

где W_1 – оператор массы с собственными значениями $\mathfrak{M}_p$ и $\mathfrak{M}_{N^{*+}}$ равными массе протона и резонанса N^{*+}, а W_2 – по-прежнему оператор взаимодействия с магнитным полем $W_2 = -M_z H$.

Ограничиваясь первым неисчезающим приближением по HM_z/kT для знаменателя (2.I) имеем

$$\sum_m \langle p, m | \exp[W\tau] | p, m \rangle \cong \sum_m \langle p, m | (1 - H\tau M_z)\exp[W_1\tau] | p, m \rangle =$$

$$= \sum_m \langle p, m | (1 - H\tau M_z) | p, m \rangle \exp[\mathfrak{M}_p \tau] = 2\exp[\mathfrak{M}_p \tau]. \qquad (2.7)$$

В (2.7) обозначено

$$-1/kT = \tau \qquad (2.8)$$

Для вычисления числителя (2.I) необходимо учесть, что операторы W_1 и W_2 не коммутируют. Последнее проявляется в том что в используемом представлении $\underline{56}$ W_1 диагонален, в то время как W_2 имеет недиагональные матричные элементы.

Оставляя в выражении $[(W_1 + W_2)\tau]^n$ лишь член линейный относительно $W_2\tau$ мы получим

$$\sum_m \langle p, m | M_z \exp[W\tau] | p, m \rangle \cong \sum_m \langle p, m | M_z \Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\tau^n}{n!} W_1^{\tau} W_2 W_1^{n-\tau-1}\Big] | p, m \rangle . \qquad (2.9)$$

Здесь мы должны подставить:

$$W_1^{n-\tau-1} | p, m \rangle = | p, m \rangle\, \mathfrak{M}_p^{n-\tau-1} , \qquad (2.10)$$

$$W_2\left|p,m\right> = -H\left(\left|p,m'\right>\left<p\,m'\right|M_z\left|p,m\right> + \left|\mathcal{N}^{*+},m'\right> \times \right.$$
$$\left. \times \left<\mathcal{N}^{*+},m'\right|M_z\left|p,m\right>\right), \tag{2.11}$$

$$W_1^2\left|p,m'\right> = \left|p,m'\right> \mathfrak{M}_p^2 , \tag{2.12}$$

$$W_1^2\left|\mathcal{N}^{*+},m'\right> = \left|\mathcal{N}^{*+},m'\right> \mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}}^2 . \tag{2.13}$$

Воспользовавшись также матричными элементами (2.2) и (2.3) мы получим числитель (2.I) в виде суммы двух членов:

$$\sum_m \left<p,m\right|M_z \exp\left[W\tau\right]\left|p,m\right> \cong S_1 + S_2 , \tag{2.14}$$

где

$$S_1 = -H\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_p^{n-1}\frac{\tau^n}{n!}\, n\left<p,m\right|M_z\left|p,m'\right>\left<p,m'\right|M_z\left|p,m\right> =$$
$$= -H\tau\, 2\mu_p^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathfrak{M}_p\tau)^{n-1}}{(n-1)!} = -2\mu_p^2 H\tau \exp\left[\mathfrak{M}_p\tau\right], \tag{2.15}$$

$$S_2 = -H\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\tau^n}{n!}\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}}^{r}\left<p,m\right|M_z\left|\mathcal{N}^{*+},m'\right> \times$$
$$\times \left<\mathcal{N}^{*+},m'\right|M_z\left|p,m\right>\mathfrak{M}_p^{n-r-1} = -\frac{16}{9}H\mu^{*2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\tau^n}{n!}\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}}^{r}\,\mathfrak{M}_p^{n-r-1} . \tag{2.16}$$

Сумма по r в (2.I6) есть сумма геометрической прогрессии:

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}}}{\mathfrak{M}_p}\right)^r = \frac{1-\left(\frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}}}{\mathfrak{M}_p}\right)^n}{1-\frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}}}{\mathfrak{M}_p}} . \tag{2.17}$$

Теперь легко суммировать по n .

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\mathfrak{M}_p^{n-1} = \mathfrak{M}_p^{-1}\left\{-1+\exp\left[\mathfrak{M}_p\tau\right]\right\}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\left(\frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}}}{\mathfrak{M}_p}\right)^n\mathfrak{M}_p^{n-1} = \mathfrak{M}_p^{-1}\left\{-1+\exp\left[\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}}\tau\right]\right\} . \tag{2.19}$$

Обозначая разность масс

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{*+}} - \mathfrak{M}_p = \Delta\mathfrak{M} , \tag{2.20}$$

из (2.I6–2.I9) для S_2 получим

$$S_2 = \frac{16}{9}H\mu^{*2}(\Delta\mathfrak{M})^{-1}\exp\left[\mathfrak{M}_p\tau\right]\left\{1-\exp\left[\Delta\mathfrak{M}\tau\right]\right\} . \tag{2.21}$$

Подставляя (2.7), (2.I4), (2.I5) и (2.2I) в определение магнитной восприимчивости протона (2.I) получим

$$\chi_p = \frac{\mathcal{N}\mu_p^2}{kT}\left\{1+\frac{8}{9}\frac{kT}{\Delta\mathfrak{M}}\left(\frac{\mu^*}{\mu_p}\right)^2\left\{1-\exp\left[-\Delta\mathfrak{M}/kT\right]\right\}\right\} . \tag{2.22}$$

Если в (2.22) разность масс $\Delta\mathfrak{M}$ устремить к нулю, то с учетом (2.5), получим несогласующуюся с экспериментом магнитную восприимчивость протона[2,3] в ненарушенной SU (6).

Поскольку в действительности параметр $\frac{K}{\Delta\mathfrak{M}} = 2{,}9 \cdot 10^{-13}$ град$^{-1}$ очень мал, то при обычных температурах в (2.22) останется лишь первый член, совпадающий с предсказанием SU (2).

Таким образом результат нарушенной SU (6) (2.22) согласуется с экспериментом ($T \sim 1^0$).

3. Точные выражения для магнитной восприимчивости и поляризации протона

Если наряду с матричными элементами (2.2 – 2.3) воспользоваться также матричным элементом M_z по состояниям резонанса $\mathcal{N}^{**+}$

$$\langle \mathcal{N}^{**+}, m | M_z | \mathcal{N}^{**+}, m \rangle = \sqrt{\frac{5}{3}} \mu^{**} \langle \tfrac{3}{2} m, 10 | \tfrac{3}{2} m \rangle , \tag{3.1}$$

где

$$\mu^{**} = \frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{M}_{\mathcal{N}^{**+}}} \mu_p = 0{,}76 \mu_p \tag{3.2}$$

то, аналогично рассмотренному в параграфе 2 первому приближению, можно вычислить любой член в разложении магнитной восприимчивости (2.1).

Суммируя все полученные приближения придем к точному выражению для χ_p в нарушенной симметрии SU (6)

$$\chi_p = \frac{\dfrac{\mathcal{N}\mu_p}{H} \sum\limits_{m=\pm\frac{1}{2}} \left\{ 2m\,\mathrm{ch}\, c(\alpha,\tau,m) + \left[2m\, b^{-1/2}(\alpha,m) + 0{,}81 \frac{1+1{,}5\alpha m}{|1+1{,}5\alpha m|} \left[1 - b^{-1}(\alpha,m)\right]^{1/2} \right] \mathrm{sh}\, c(\alpha,\tau,m) \right\} \exp\left[-1{,}25\alpha m\, \Delta\mathfrak{M} \tau\right]}{\sum\limits_{m=\pm\frac{1}{2}} \left[\mathrm{ch}\, c(\alpha,\tau,m) + b^{-1/2}(\alpha,m)\, \mathrm{sh}\, c(\alpha,\tau,m) \right] \exp\left[-1{,}25\alpha m\, \Delta\mathfrak{M}\tau\right]} \tag{3.3}$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \frac{\mu_p H}{\Delta \mathfrak{M}} , \tag{3.4}$$

$$b(\alpha, m) = 1 + 2{,}63 \left(\frac{\alpha}{1 + 1{,}5\alpha m} \right)^2 , \tag{3.5}$$

$$c(\alpha,\tau,m) = -(0{,}5 + 0{,}75\alpha m)\, b^{1/2}(\alpha,m)\, \Delta\mathfrak{M}\tau . \tag{3.6}$$

Величины $\Delta\mathfrak{M}$ и τ определены в (2.20) и (2.8)

В (3.3) мы имеем два параметра:

$$\frac{\mu_p H}{\Delta \mathfrak{M}} = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\mu_p H}{kT} = a$$

Нетрудно убедиться, что формула (2.22), с учетом (2.5) получится из (3.3) как сумма первых членов разложения по α и по a. То есть сделанное в параграфе 2 приближение соответствует случаю $\alpha \ll 1$ и $a \ll 1$.

При $\alpha \ll 1$, что соответствует магнитным полям $H \ll 3 \cdot 10^{19}$ гаусс, χ_p в нарушенной SU (6) (3.3) в первом приближении, совпадает с χ_p в SU (2): $\chi_p = \mathcal{N}\mu_p \,\mathrm{th}\, a$.

Наибольшее отличие от SU(2) проявляется при $\alpha \gg 1$. Тогда (3.3) сводится к

$$\chi_p = \frac{\mathcal{N}\mu_p}{H} \; \frac{2{,}16\, \mathrm{sh}\, 1{,}52a + 0{,}16\, \mathrm{sh}\, 0{,}27a}{1{,}42\, \mathrm{ch}\, 1{,}52a + 0{,}58\, \mathrm{ch}\, 0{,}27a} . \tag{3.7}$$

При $a \ll 1$ в первом приближении по a из (3.7) получим

$$\chi_p = \frac{\mathcal{N} \langle p | \underline{M}^2 | p \rangle}{3kT} , \tag{3.8}$$

что полностью аналогично соответствующим[2,3] результатам SU (2), SU(3) и ненарушенной SU (6). Отличие состоит в том, что в (3.8) мы должны подставить квадрат магнитного момента протона в нарушенной симметрии SU (6), равный

$$\langle p | \underline{M}^2 | p \rangle = 3\mu_p^2 \left[1 + \frac{8}{9} \left(\frac{\mu^{*}}{\mu_p} \right)^2 \right] = 3\mu_p^2 (1 + 0{,}66) \tag{3.9}$$

В противоположном предельном случае $a \to \infty$ из (3.7) следует максимальное значение магнитного момента единицы об"ёма в нарушенной симметрии SU (6):

$$I_{p_{max}} \equiv \mathcal{N} \langle p | M_z | p \rangle_{max} \equiv (\chi_p H)_{max} = 1{,}52 \mathcal{N} \mu_p . \qquad (3.10)$$

Результат (3.10) в полтора раза больше того значения, что дают классика SU (2) и SU (3). Значению $\mathcal{N}\mu_p$ соответствует легко интерпретируемый случай ориентации всех $\mathcal{N}$ протонов по направлению магнитного поля.

Заметим, что точное рассмотрение ненарушенной симметрии SU (6) приводит для магнитной восприимчивости протона к выражению

$$\chi_p = \frac{\mathcal{N}\mu_p}{3H} \; \frac{10\,sh\,\frac{5}{3}a + sh\,\frac{1}{3}a}{2ch\,\frac{5}{3}a + ch\,\frac{1}{3}a} , \qquad (3.11)$$

частный случай которого при $a \ll$ I, рассмотрен в [2,3].

Из (3.11) следует, что насыщение в ненарушенной SU (6) также имеет отличное от обычного смысл: $(\chi_p H)_{max} = \frac{5}{3} \mathcal{N} \mu_p$

Наряду с рассмотренным эффектом, SU (6) дает вклад также в эффект поляризации протонов:

$$f_p = \frac{\sum_m \langle p, m | S_z P | P, m \rangle}{\frac{1}{2} \sum_m \langle p, m | P | P, m \rangle} . \qquad (3.12)$$

В случае ненарушенной симметрии получается

$$f_p = \frac{2\,sh\,\frac{5}{3}a - sh\,\frac{1}{3}a}{2\,ch\,\frac{5}{3}a + ch\,\frac{1}{3}a} , \qquad (3.13)$$

в то время как нарушенная SU (6) дает

$$f_p = \frac{2\sum_{m=\pm\frac{1}{2}} \left[chc(\alpha,\tau,m) + \beta^{-1/2}(\alpha,m)\, c(\alpha,\tau,m) \right] \exp\left[-1{,}25\alpha m \Delta \Pi \tau\right]}{\sum_{m=\pm\frac{1}{2}} \left[chc(\alpha,\tau,m) + \beta^{-1/2}(\alpha,m)\, shc(\alpha,\tau,m) \right] \exp\left[-1{,}25\alpha m \Delta \Pi \tau\right]} . \qquad (3.14)$$

Здесь использованы обозначения (3.4–3.6)

При $\alpha \ll$ I выражение (3.14) совпадает с предсказанием SU (2)

$$f_p = th\,a \qquad (3.15)$$

При $\alpha \gg$ I оно сводится к формуле

$$f_p = \frac{1{,}42\,sh\,1{,}52 - 0{,}58\,sh\,0{,}27a}{1{,}42\,ch\,1{,}52 + 0{,}58\,ch\,0{,}27a} \qquad (3.16)$$

Кривая (3.16) при малых a совпадает с (3.15), затем идет несколько ниже и опять совпадает с (3.15) при больших a.

Максимальное отличие, равное 3%, получается при a = I,5.

Автор выражает благодарность Б.В.Струминскому и Р.А.Сардаряну за полезные замечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Morpurgo, in the "Proceedings of the 14th International Conference on High-Energy Physics, Vienna 1968", Copyright 1968, by CERN, Geneve.

2. В.А.Джрбашян, Препринт Ереванского физического института ЕРФИ-ТФ-1(68).

3. В.А.Джрбашян, Известия АН Арм.ССР, Физика, 3,408 (1968).

4. Н.Ф. Рамзей, в "Экспериментальной ядерной физике" том I, под ред.Э.Сегре, М, 1955, стр.302.

5. M.A.B. Beg, A.Pais, Phys. Rev., 137, 6B, B1514 (1965)

Рукопись поступила 28 июля 1969г.

Заказ 483 ВФ 03205 Тираж 250
Множительно-копировальный сектор Ереванского физического института, Ереван 36,Маркаряна 2