ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ—ТФ—4(69)

С.А.Хейфец, Ю.Ф.Орлов

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В СИНХРОТРОНЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧАСТОТАХ УСКОРЯЮЩЕГО ПОЛЯ

АРУС

ԵՐԵՎԱՆ 1969 ЕРЕВАН

Unstability of particle motion in synchrotron under high frequencies of accelerating field

S.Kheifets,Yu.Orlov

Summary

Radial or longuitudinal motion of particles in a synchrotron become unstable under conditions high multiplicity of accelerating field frequency.This unsteadiness appears in synchrotrons of descrete acceleration field and in waveguide synchrotrons as well.

При достаточно большой кратности частоты ускоряющего поля либо продольное, либо радиальное движения частиц в синхротроне оказываются неустойчивыми. Эта неустойчивость имеет место как для синхротронов с дискретным ускорением, так и для волноводных синхротронов.

Покажем возникновение неустойчивости в простом случае аксиально-симметричного синхротрона. Рассмотрим в цилиндрических координатах θ, R, z движение частицы в неоднородном магнитном поле $H_z = H + GR^2 - 2Gz^2$ и в поле бегущей по азимуту θ цилиндрической волны частоты $q\omega$ (поле имеет плоскость симметрии $z=0$). Нас интересует в данной работе лишь вопрос устойчивости движения,поэтому для простоты рассмотрим случай без ускорения, когда все величины не зависят от времени. Удобно выбрать векторный $\vec{A}$ и скалярный A_0 потенциалы поля в виде (цилиндрическая волна типа E):

$$A_\theta = HR/2 + GR^3/4 - GRz^2, \qquad (1)$$

$$A_R = 0, \qquad (2)$$

$$A_z = A(q\omega z/c)\, \mathcal{J}_q(q\omega R/c)\cos(q\Theta - q\omega t), \qquad (3)$$

$$A_0 = A\, \mathcal{J}_q(q\omega R/c)\sin(q\Theta - q\omega t)\ . \qquad (4)$$

Здесь $\mathcal{J}_q(q\omega R/c)$ – функция Бесселя I-го рода порядка q, $q\omega$ – круговая частота бегущей волны.

Введем, как обычно, в плоскости $z=0$ координатную окружность радиуса ρ с центром в начале координат, фазу частицы $\phi = q(\Theta - \omega t)$ относительно высокочастотного поля и рассмотрим малые отклонения от координат равновесной частицы $r = R - \rho$, $\varphi = \phi - \phi_s$. Разложив лагранжиан по малым величинам r/ρ, z/ρ и φ до квадратичных членов включительно, и отбросив полную производную, перейдем к гамильтониану $\mathcal{H}$. Равновесная частица определяется из условия равенства нулю линейных, по координатам и импульсам, членов гамильтониана (в данном случае членов пропорциональных r и φ):

$$\mathcal{E}\beta + eH_s\rho - eA(d\mathcal{J}/d\beta)\sin\phi_s = 0, \qquad (5)$$

$$\cos\phi_s = 0 \qquad (6)$$

где введены обозначения $\beta = \rho\omega/c$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_q(q\beta)$, $\mathcal{E}/mc^2 = \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, а $H_s = H + G\rho^2$ напряженность магнитного поля на равновесной орбите. Из (6) следует $\phi_s = \pm\pi/2$, $\sin\phi_s = \pm 1$. Такое значение равновесной фазы связано с независимостью H_z и ω от времени (отсутствие ускорения). Последние слагаемые уравнения (5) возникают из-за действия компонент E_r и H_z. Оценим их относительную величину [ж)]:

$$\frac{eA(d\mathcal{J}/d\beta)}{eH_s\rho} = \frac{E_s}{H_s}\,\frac{d\mathcal{J}/d\beta}{q\mathcal{J}} \simeq \frac{E_s}{H_s\, q^{1/3}}\ ,$$

ж) Здесь использованы асимптотические значения функции Бесселя $\mathcal{J}_q(q\beta)$ и её производной при $1 << q << \gamma^3$

$$\mathcal{J}_q \simeq q^{-1/3}\ ; \qquad d\mathcal{J}_q/d\beta \simeq q^{1/3}\ .$$

где $E_s = qA\mathcal{J}/\rho$ – амплитуда напряженности продольной составляющей электрического поля E_θ. Таким образом при выполнении неравенства

$$E_s/H_s << q^{1/3} \qquad (7)$$

равновесная орбита создаётся полем H_z, а при выполнении обратного / – полем E_r.

Используя соотношения (5), (6) нетрудно получить следующий гамильтониан малых колебаний

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(a_1 p_r^2 + a_2 r^2 + a_3 p_\varphi^2 + a_4\varphi^2 - 2a_5 r p_\varphi + a_1 p_z^2 + a_6 z^2\right), \qquad (8)$$

где коэффициенты a_i имеют вид

$$a_1 = c^2/\mathcal{E}\ , \qquad (9)$$

$$a_2 = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\omega^2\left[1 - n \pm eA\mathcal{J}q^2/\mathcal{E}\gamma^2\beta^2 + (eA\,d\mathcal{J}/d\beta)^2/\mathcal{E}^2\gamma^2\beta^2\right], \qquad (10)$$

$$a_3 = \omega^2 q^2/\mathcal{E}\gamma^2\beta^2\ , \qquad (11)$$

$$a_4 = \mp eA\mathcal{J}, \qquad (12)$$

$$a_5 = \omega q\left[1 \pm (eA\,d\mathcal{J}/d\beta)/\mathcal{E}\gamma^2\beta\right]/\rho\ , \qquad 13)$$

$$a_6 = \mathcal{E}\omega^2 n/c^2$$

и введен показатель спада магнитного поля $n = -\left[(R\,\partial H_z/\partial R)/H_z\right]_{R=\rho} = 2eG\rho^3/\mathcal{E}\beta$.

Как следует из гамильтониана (8), аксиальные колебания не зависят от остальных координат. Это позволяет сразу найти их частоту, которая имеет обычный вид $\omega_z = \sqrt{a_1 a_6} = \omega\sqrt{n}$.

Продольные и радиальные колебания оказываются связанными ($a_5 \neq 0$). Радиально-фазовая связь изменяет частоту продольных колебаний, так как смещение частицы с равновесной орбиты изменяет частоту обращения. Эта же связь может также изменить частоту радиальных колебаний (если получающиеся частоты продольных и радиальных колебаний не слишком отличаются друг от друга), поскольку отклонение энергии частицы от равновесного значения приводит к искажению орбиты.

Оценим вклад слагаемых, зависящих от электрического поля, в коэффициентах a_5 и a_2. В коэффициенте a_5 второе слагаемое имеет порядок $E_s/H_s q^{1/3}\gamma^2$, если выполнено неравенство (7), и γ^{-2}, если имеет место обратное неравенство. Для ультрарелятивистской частицы им можно пренебречь в любом случае. Второе слагаемое в a_2 много меньше первого, если

$$qE_s/H_s \ll (1-n)\gamma^2\beta^2 \qquad (14)$$

при выполнении неравенства (7), и если $q^{4/3} \ll (1-n)\gamma^2\beta^2$ при обратном неравенстве. Заметим, что в предельном случае $\rho \to \infty$ (линейный ускоритель) нужно считать $q \sim \rho$ (при заданной частоте высокочастотного поля) и потому в этом случае второе слагаемое в a_2 много больше первого. Наконец, третье слагаемое в a_2 всегда много меньше второго и им можно пренебречь.

Ограничимся дальше, практически, наиболее интересным для синхротрона случаем, когда одновременно выполняются неравенства (7) и (14).

Частоты продольных и радиальных колебаний можно найти приведя гамильтониан к диагональному виду. Это достигается с помощью следующих канонических преобразований:

$$Q_1 = r + DP_\varphi\,, \qquad P_1 = \frac{1}{B-D}\left(\varphi + BP_r\right), \qquad (15)$$
$$Q_2 = \varphi + DP_r\,; \qquad P_2 = \frac{1}{B-D}\left(r + BP_\varphi\right).$$

Нетрудно убедиться, что скобки Пуассона новых переменных удовлетворяют требованиям каноничности.

Коэффициенты B и D преобразований (15), а также эффективные массы и частоты колебаний M_1, M_2, ω_1 и ω_2 определяются совместно из системы шести уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при $P_r^2;\ r^2;\ P_\varphi^2;\ \varphi^2;\ P_\varphi r;\ P_r\cdot\varphi$ в уравнении

$$\mathcal{H} = P_1^2/2M_1 + M_1\omega_1^2 Q_1^2/2 + P_2^2/2M_2 + M_2\omega_2^2 Q_2^2/2\,,$$

где $\mathcal{H}$ определен в (8), а P и Q в (15).

Из этой системы можно найти коэффициент

$$D = \frac{a_1a_2 - a_3a_4}{2a_4a_5} \mp \sqrt{\left(\frac{a_1a_2 - a_3a_4}{2a_4a_5}\right)^2 + \frac{a_1}{a_4}}\,, \qquad (16)$$

через который выражаются массы и частоты:

$$M_1 = 1/(a_1 + a_4D^2)\,, \qquad (17)$$

$$M_2 = M_1a_1/(a_3 + a_5D)\,, \qquad (18)$$

$$\omega_1 = \sqrt{a_1a_2 - a_4a_5D}\,, \qquad (19)$$

$$\omega_2 = \sqrt{a_4(a_3 + a_5D)}\,. \qquad (20)$$

В рассматриваемом случае, когда выполнены неравенства (7) и (14), $a_1a_2 \gg a_3a_4$, что позволяет упростить выражение (16).

Выражения для масс и частот имеют простой наглядный смысл в двух предельных случаях, соответствующих малому и большому значениям параметра qE_s/H_s

I. Пусть $(a_1 a_2/a_4 a_5)^2 \gg a_1/a_4$ или, подставив значения коэффициентов из (9-13),

$$qE_s/H_s \ll (1-n)^2\beta^2 \qquad (21)$$

В этом случае $D \simeq -a_5/a_2$ мы получаем хорошо известные выражения для продольных и радиальных колебаний $M_1 = \mathcal{E}/c^2$,

$$M_2 = \omega^2 q^2 [\gamma^{-2} - (1-n)^{-1}]/\mathcal{E}\beta^2,$$
$$\omega_1 = \omega\sqrt{1-n}\,(1 \mp qE_s/H_s(1-n)^2\beta^2), \qquad (22)$$
$$\omega_2 = \omega\sqrt{\mp qE_s[\gamma^{-2} - (1-n)^{-1}]/H_s\beta^2}.$$

В частности для ультрарелятивистской частицы получается $M_2 < 0$ ("отрицательная масса" продольных колебаний) и $\phi_s = +\pi/2$. Поправка к частоте радиальных колебаний, связанная с высокочастотным полем, отрицательна и, имеет порядок $qE_s/H_s(1-n)^2$.

II. Пусть $(a_1 a_2/a_4 a_5)^2 < a_1/a_4$ или

$$(1-n)^2\beta^2 < qE_s/H_s \qquad (23)$$

В этом случае $D \simeq \pm\sqrt{a_1/a_4}$ и для масс и частот получаются выражения $M_1 = \mathcal{E}/2c^2$; $M_2 = \mathcal{E}\beta(qE_s/H_s)^{1/2}/2q^2\omega^2$;
$\omega_1^2 = -\omega_2^2 = \mp\omega^2(qE_s/H_s)^{1/2}$.

Отсюда видно, что при достаточно большой кратности возникает область значений параметра qE_s/H_s в которой частоты, как продольных, так и радиальных колебаний определяются электрическим полем и в пределе (23) не зависят от градиента магнитного поля.

В этой области устойчивым является только один из типов колебаний в зависимости от знака коэффициента a_5.

Обнаруженная здесь неустойчивость в синхротроне имеет то же происхождение, что и неустойчивость движения в линейном ускорителе [1].

Существование неустойчивости этого типа нужно иметь в виду, например, при разработке электронного синхротрона на сверхбольшую энергию, для которого наличие синхротронного излучения заставляет производить ускорение как можно быстрей (большое E_s), а радиус ускорителя делать как можно больше (большое q и малое H_s).

ЛИТЕРАТУРА

I. Коломенский А.А., Лебедев В.Н.,"Теория циклических ускорителей", Физматиз, М. 1962 г.,

2. Кагичинский И.М.,"Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях", АИ М. 1966г.