8.415

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ–ТФ–5(69)

С.А.Хейфец

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В СИНХРОТРОНЕ С ЖЕСТКОЙ ФОКУСИРОВКОЙ ПРИ БОЛЬШИХ ЧАСТОТАХ УСКОРЯЮЩЕГО ПОЛЯ

АРУС

ԵՐԵՎԱՆ 1969 ЕРЕВАН

Unstability of particle motion in strong focusing synchrotron under high frequencies of accelerating field.

S.Kheifets

Summary

The results of the author's and Yu.Orlov's work are generalized for a not axially symmetrical accelerator. There is unstability in such an accelerator with strong coupling of radial and longuitudinal oscillations as well as in axially symmetrical case.It is shown that there appear regions of longuitudinal and radial oscillations stability in accelerator with sign alternating magnetic field.The frequencies in these regions may be high enough.Inequalities for limits of unstability regions are given.The values of parametrs in short ranges of which stability of longuitudinal and radial oscillations simultaneausly appears are estimated.

Результаты работы Ю.Ф.Орлова и автора обобщены на аксиально-несимметричный ускоритель. В таком ускорителе с сильной связью продольных и радиальных колебаний имеет место неустойчивость,так же как и в аксиально-симметричном случае. Показано, что в ускорителе со знакопеременным магнитным полем возникают области устойчивости продольных и радиальных колебаний, в которых их частототы могут быть большими. Приведены неравенства, при выполнении которых возникает неустойчивость, а также найдены значения параметров, вблизи которых возникает устойчивость,одновременно продольных и радиальных колебаний.

1.Введение

В работе Ю.Ф.Орлова и автора было исследовано движение частиц в аксиально-симметричном ускорителе в случае произвольных величин напряженностей магнитного H_s и электрического E_s полей и частоты высокочастотного поля. При значениях параметра $\varkappa = qE_s/H_s > (1-n)^2$ (где q -кратность высокочастотного поля, n - показатель спада магнитного поля) в аксиально-симметричном ускорителе возникает неустойчивость движения частиц. В настоящей работе проведено аналогичное исследование для несимметрического ускорителя. Показано, что в ускорителе со знакопеременным магнитным полем возможны условия, при которых продольные и радиальные колебания частиц оказываются одновременно устойчивыми при $\varkappa > (1-n)^2$,а их частоты - большими.

Эта своеобразная сильная фокусировка продольных и радиальных колебаний (сильная фокусировка второго типа) аналогична сильной фокусировке радиальных и аксиальных колебаний в обычном жесткофокусирующем синхротроне (сильная фокусировка первого типа).Применение сильной фокусировки второго типа может оказаться выгодной в модифик циях линейных ускорителей, поскольку в обычных линейных ускорителях поперечное движение неустойчиво, а продольное-слабо устойчиво, а также для сверх-больших электронных син - хротронов, у которых магнитное поле нужно уменьшать для уменьшения излучения, а кратность по этой же и другим причинам может быть очень большой.

2. Система координат.

Движение частицы в аксиально-несимметричном поле удобно рассматривать в натуральной системе координат, в которой единичные ортогональные векторы $\vec{n}(\theta)$ -внешней нормали, $\vec{\tau}(\theta)$ -касательной и $\vec{b}(\theta)$ - бинормали координатной кривой $\vec{r} = \vec{r}_0(\theta)$ образуют правый сопровождающий трехгранник[1]. За независимую переменную выбран обобщенный азимут θ, переходящий в обычный азимут цилиндрической системы координат, если координатная кривая $\vec{r}_0$ =const является окружностью.

Единичные векторы и их производные связаны соотношениями Серре-Френе[2], которые для плоской кривой (без кручения) имеют вид:

$$\vec{\tau}(\theta) = K_0\, d\vec{r}_0/d\theta\,; \qquad d\vec{n}/d\theta = K(\theta)\vec{\tau}/K_0\,;$$
$$d\vec{\tau}/d\theta = -K(\theta)\vec{n}/K_0\,; \qquad d\vec{b}/d\theta = 0\,, \tag{2.I}$$

где $K(\theta)$ -кривизна кривой в точке θ, а $K_0 = 2\pi/L$ (L -длина кривой).

Радиус-вектор произвольной (достаточно близкой к координатной кривой) точки в натуральной системе координат выражается через

координаты $u^i = x,\ \theta,\ z$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0(\theta) + x\vec{n}(\theta) + z\vec{b}(\theta) \tag{2.2}$$

Компоненты метрического тензора $g_{ik} = \vec{\sigma}_i\,\vec{\sigma}_k$ определяются векторами $\vec{\sigma}_i = d\vec{r}/du^i$:

$$\vec{\sigma}_1 = d\vec{r}/dx = \vec{n}\,; \quad \vec{\sigma}_2 = d\vec{r}/d\theta = (1+Kx)\vec{\tau}/K_0\,; \vec{\sigma}_3 = d\vec{r}/dz = \vec{b}\,.$$

Таким образом g_{ik} оказывается диагональным тензором с компонентами $1,\ (1+Kx)^2/K_0^2,\ 1$ и детерминантом $g = (1+Kx)^2/K_0^2$.

Любой вектор $\vec{A}$ можно разложить на компоненты $\vec{A} = A_x\vec{n} + A_\theta\vec{\tau} + A_z\vec{b}$, через которые выражаются контравариантные

$$A^1 = A_x\,; \quad A^2 = \frac{K_0}{1+Kx}A_\theta\,; \quad A^3 = A_z \tag{2.3}$$

и ковариантные

$$A_1 = A_x\,, \quad A_2 = \frac{1+Kx}{K_0}A_\theta\,; \quad A_3 = A_z \tag{2.4}$$

составляющие вектора.

Дифференциальные операторы в натуральной системе координат определяются формулами:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{K_0}{1+Kx}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A_x(1+Kx)}{K_0}\right] + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{A_z(1+Kx)}{K_0}\right]\right\} \tag{2.5}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{A})_x = \frac{K_0}{1+Kx}\left(\frac{\partial A_3}{\partial\theta} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) = \frac{K_0}{1+Kx}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \tag{2.6}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{A})_\theta = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{2.7}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{A})_z = \frac{K_0}{1+Kx}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right) = \frac{K_0}{1+Kx}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+Kx}{K_0}A_\theta\right) - \frac{\partial A_x}{\partial\theta}\right] \tag{2.8}$$

3. Поля.

Электромагнитное поле ускорителя можно представить в виде суммы статической (или почти статической) и высокочастотной частей. В соответствии с этим вектор-потенциал поля будем искать в виде суммы $A_i + a_i$. A_i описывает магнитное поле. Поскольку нас интересует лишь вопрос устойчивости движения частиц, то для упрощения задачи будем считать A_i независящими от времени функциями координат u^i. Кроме того примем, что координатная кривая состоит из кусков, на каждом из которых $dK/d\theta = 0$. Тем самым мы пренебрегаем краевыми эффектами на границах магнитов. Эти эффекты могут быть учтены по теории возмущений, как малые поправки. В этих предположениях уравнения Максвела для статического поля удовлетворяются при выборе потенциала $A_1 = A_3 = A_0 = 0;\ \partial A_2/\partial\theta = 0$ Нетрудно убедиться, что функция

$$A_\theta = \frac{H}{2}\cdot\frac{1-Kx}{K} + \frac{G}{4}\left(\frac{1+Kx}{K}\right)^3 - Gz^2\frac{1+Kx}{K}; \qquad (3.1)$$

$$dH/d\theta = 0; \quad dG/d\theta = 0; \quad dK/d\theta = 0.$$

удовлетворяет всем необходимым требованиям. Функции $H(\theta)$ и $G(\theta)$ связаны с полем на орбите $H_s(\theta)$ и его показателем спада $n(\theta)$. Из 3.1 можно найти магнитное поле $\vec H = \mathrm{rot}\,\vec A$:

$$H_x = 2Gz/K; \quad H_0 = 0; \quad H_z = H + G/K^2 + 2Gx/K - 2Gz^2$$

Вводя обозначения

$$H_s = H + G/K^2 \qquad (3.2)$$

$$n = -2G/H_sK^2 \qquad (3.3)$$

в линейном приближении получаем

$$H_x = -H_s nzK; \quad H_z = H_s(1 - nxK). \qquad (3.4)$$

Найдем теперь выражения для высокочастотных вектор-потенциала a_i, магнитного поля $\vec h = \mathrm{rot}\,\vec a$ и электрического поля $\vec E = -\mathrm{grad}\ a_0 - \partial\vec a/c\partial t$.

Уравнения Максвела

$$\mathrm{div}\,\vec a + \partial a_0/c\partial t = 0 \qquad (3.5)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec h = \partial\vec E/c\partial t \qquad (3.6)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec E = -\partial\vec h/c\partial t \qquad (3.7)$$

удовлетворяются при следующем выборе потенциалов

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 0, \\ a_3 &= q\frac{\omega_0}{c} f[K(\theta), x]\cos\phi, \\ a_0 &= f[K(\theta), x]\sin\phi \end{aligned} \qquad (3.8)$$

(где $\phi = q\theta - q\omega_0 t$, q – кратность, $\omega_0 = 2\pi v_s/L$, v_s – равновесная скорость частицы, $f[K, x]$ – определена ниже), описывающих бегущую электромагнитную волну.

Получающиеся из 3.8 поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} h_x &= -\frac{K_0}{1+Kx}\,q^2\frac{\omega_0}{c}\,fz\sin\phi \\ h_\theta &= -q\frac{\omega_0}{c}\,\frac{df}{dx}\,z\cos\phi \\ h_z &= 0 \end{aligned} \qquad (3.9)$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{df}{dx}\sin\phi \\ E_\theta &= -\frac{K_0}{1+Kx}\,qf\cos\phi \\ E_z &= -q^2\frac{\omega_0^2}{c^2}\,fz\sin\phi \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Входящая в выражения для полей функция $f(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{K}{1+Kx}\frac{df}{dx}+\frac{q^2\omega_0^2}{c^2}f\left(1-\frac{K_0^2c^2}{\omega_0^2(1+Kx)^2}\right)=0,$$

которое получается из уравнения 3.6 после подстановки выражений 3.9 и 3.I0. Введем вместо x новую переменную $\beta=\omega_0(1+Kx)/K_0 c$. Тогда для $f(\beta)$ получим:

$$\frac{d^2 f}{d\beta^2}+\frac{1}{\beta}\frac{df}{d\beta}+\frac{q^2K_0^2}{K^2}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)f=0. \qquad (3.II)$$

Заметим, что переменная $\beta(x)$ имеет смысл продольной составляющей скорости частицы, имеющей координату x, отнесенной к скорости света. При $x=0$ $\beta=\beta_s$, где β_s приведенная скорость равновесной частицы.

Формальное решение уравнения 3.II представляет собой функцию Бесселя порядка qK_0/K от переменной $\beta(x)$:

$$f(\beta(x))=Z_{qK_0/K}\left[\frac{qK_0}{K}\frac{\omega_0}{K_0 c}(1+Kx)\right]$$

В простом случае, когда магнитное поле имеет N одинаковых периодов, состоящих каждый из двух участков равной длины, отклоняющих частицу на угол $\pm\Theta$ каждый, $K=2N\Theta/L$ и $|K/K_0|=\frac{N\Theta}{\pi}$.

В этом случае функция f имеет более простой вид $f=J_{q_1}(q,\beta)$, где $q_1=q\pi/N\Theta$, если q_1 – целое число.

4. Уравнения движения.

Чтобы получить уравнения движения частицы, модифицируем несколько вывод Коломенского и Лебедева[I]. Будем исходить из гамильтониана [I]:

$$\mathcal{H}(P_1,x;P_2,\theta;P_3,z;t)=c\left\{m^2c^2+\frac{K_0^2}{(1+Kx)^2}\left(P_2-\frac{e}{c}A_2-\frac{e}{c}a_2\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(P_1-\frac{e}{c}A_1-\frac{e}{c}a_1\right)^2+\left(P_3-\frac{e}{c}A_3-\frac{e}{c}a_3\right)^2\right\}^{1/2}+ea_0,$$

в который введены дополнительные члены $e\vec{a}/c$ и ea_0, связанные с высокочастотным полем. Следуя методу[I] перейдем от независимой переменной t к независимой переменной θ (t становится при этом "координатой", которой соответствует "импульс" $-\mathcal{H}$):

$$\mathcal{H}^*(-\mathcal{H},t;P_1,x;P_3,z;\theta)=-P_2=-\frac{e}{c}A_2-\frac{e}{c}a_2-\frac{1+Kx}{K_0}\left\{\left(\frac{\mathcal{H}-ea_0}{c}\right)^2-\right.$$
$$\left.-m^2c^2-\left(P_1-\frac{e}{c}A_1-\frac{e}{c}a_1\right)^2-\left(P_3-\frac{e}{c}A_3-\frac{e}{c}a_3\right)^2\right\}^{1/2}$$

Имея в виду характер зависимости $\vec{a}, a_0$ от t, совершим теперь точечное преобразование от "координаты" t к новой координате $\phi=q\theta-q\omega_0 t$. Производящую функцию этого преобразования выберем в виде

$$F=P_x\cdot x+P_z\cdot z+P_\phi\cdot\phi.$$

Новые координаты и старые импульсы определяются соотношениями

$$Q_x=\frac{\partial F}{\partial P_x}=x; \qquad P_1=\frac{\partial F}{\partial x}=P_x;$$
$$Q_z=\frac{\partial F}{\partial P_z}=z; \qquad P_3=\frac{\partial F}{\partial z}=P_z;$$
$$Q_\phi=\frac{\partial F}{\partial P_\phi}=\phi; \qquad -\mathcal{H}=\frac{\partial F}{\partial t}=-q\omega_0 P_\phi;$$

Гамильтониан приобретает вид

$$\hat{\mathcal{H}}=\hat{\mathcal{H}}(P_x,x;P_z,z;P_\phi,\phi;\theta)=\mathcal{H}^*+\frac{\partial F}{\partial\theta}=$$
$$=qP_\phi-\frac{1+Kx}{K_0}\left\{\left(\frac{P_\phi q\omega_0-ea_0}{c}\right)^2-m^2c^2-\left(P_x-\frac{e}{c}A_1-\frac{e}{c}a_1\right)^2-\left(P_z-\frac{e}{c}A_3-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{e}{c}a_3\right)^2\right\}^{1/2}-\frac{e}{c}A_2-\frac{e}{c}a_2$$

Уравнения движения в линейном приближении получаются после разложения $\hat{\mathcal{H}}$ по P_x, x, P_z, z, P_ϕ и ϕ до членов второго порядка включительно. При этом, одновременно, получаются также уравнения, определяющие равновесные значения координат и импульсов – из требования отсутствия в разложении линейных, по координатам и импульсам, членов.

Выпишем уравнения равновесия.

Из $(\partial\hat{\mathcal{H}}/\partial P_x)_0 = 0$ следует $(A_1 + a_1)_0 = 0$ 4.2

$(\partial\hat{\mathcal{H}}/\partial P_z)_0 = 0$ $(A_3 + a_3)_0 = 0$ 4.3

$(\partial\hat{\mathcal{H}}/\partial x)_0 = 0$ $\frac{e}{\omega_0}\left(\frac{\partial a_0}{\partial x}\right)_0 - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)_0 - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}\right)_0 = \frac{K}{K_0}p$ 4.4

$(\partial\hat{\mathcal{H}}/\partial z)_0 = 0$ $\frac{e}{\omega_0}\left(\frac{\partial a_0}{\partial z}\right)_0 - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)_0 - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)_0 = 0$ 4.5

$(\partial\hat{\mathcal{H}}/\partial P_\phi)_0 = 0$ $\left(P_\phi\frac{q\omega_0}{c} - \frac{e}{c}a_0\right)_0 = \frac{K_0 pc}{q\omega_0}$ 4.6

$(\partial\hat{\mathcal{H}}/\partial\phi)_0 = 0$ $\frac{e}{\omega_0}\left(\frac{\partial a_0}{\partial\phi}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_2}{\partial\phi}\right) = 0$ 4.7

В уравнениях 4.4, 4.5 и 4.7 использованы условия 4.2, 4.3 и 4.6. Индексом ноль обозначены величины, вычисленные при $P_x = P_z = x = z = 0$, $P_\phi = P_{\phi s}$ и $\phi = \phi_s$, где $P_{\phi s}$ и ϕ_s – равновесные значения импульса P_ϕ и фазы частицы. Буквой p обозначен равновесный продольный импульс частицы

$$p = \sqrt{\left(P_\phi\frac{q\omega_0}{c} - a_0\right)_0^2 - m^2c^2}$$ 4.8

Подставив сюда 4.6 получим $p = mc\beta_s/\sqrt{1-\beta_s^2}$, где $\beta_s = \omega_0/K_0 c$ – определение скорости, которое согласуется с приведенным выше в § 3.

Используем теперь выражения для потенциалов полей. Единственными нетривиальными условиями равновесия оказываются при таком выборе потенциалов 4.4 и 4.7. Из 4.4 с учетом определений 3.2 и 3.10 следует

$$pc = -\frac{e}{K}\left(H_s + \frac{E_x}{\beta_s}\right).$$ 4.9

В случае, когда $E_x \ll \beta_s H_s$ 4.9 представляет собой обычную связь между импульсом, полем и кривизной орбиты. Из 4.7 вытекает

$$\cos\phi_s = 0\ ; \qquad \phi_s = \pm\pi/2\ ,$$ 4.10

что является следствием сделанного предположения о независимости H_s и ω_0 от времени.

Выпишем далее отличные от нуля вторые производные $\hat{\mathcal{H}}$.

$$\alpha_1 = \left(\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}}{\partial P_x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}}{\partial P_z^2}\right)_0 = \frac{1}{K_0 p}\ ,$$ 4.11

$$\alpha_2 = \left(\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{K^2 p}{K_0}\left(1 - \frac{n}{1 - \frac{f\sin\phi_s}{\beta_s H_s}}\right) + \frac{q^2\omega_0 e f\sin\phi_s}{c^2\beta_s^2\gamma^2} + \frac{e^2 q^2 f (dx)^2}{K_0 p\beta_s^2\gamma^2 c^2}\ ,$$ 4.12

$$-\alpha_5 = \left(\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}}{\partial x\,\partial P_\phi}\right)_0 = -qK\left(1 + \frac{e(df/dx)\sin\phi_s}{K\varepsilon\beta^2\gamma^2}\right)\ ,$$ 4.13

$$\alpha_6 = \left(\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}}{\partial z^2}\right)_0 = \frac{K^2 p}{K_0}\,n\ ,$$ 4.14

$$\alpha_3 = \left(\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}}{\partial P_\phi^2}\right)_0 = \frac{q^2 K_0}{p\gamma^2}\ ,$$ 4.15

$$\alpha_4 = \left(\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}}{\partial\phi^2}\right)_0 = -\frac{e f\sin\phi_s}{\omega_0}\ .$$ 4.16

Здесь $\varepsilon = \frac{pc}{\beta_s}$, $\gamma^2 = (1-\beta_s^2)^{-1}$, а определено в 3.3.

Таким образом гамильтониан, описывающий линейные колебания по x, $\varphi = \phi - \phi_s$ и z имеет вид ($P_\varphi = P_\phi - P_{\phi_s}$):

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 P_x^2 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 P_\varphi^2 + \alpha_4 \varphi^2 - 2\alpha_5 x P_\varphi + \alpha_1 P_z^2 + \alpha_6 z^2\right) \qquad 4.17$$

Выражения 4.11–4.17 при $K = K_0 = const$ совпадают с соответствующими выражениями вышеупомянутой работы Ю.Ф. Орлова и автора.

Ограничимся в дальнейшем случаем, когда в коэффициентах α_2 и α_5 можно пренебречь вкладом слагаемых, связанных с высокочастотным полем. (В аксиально-симметрическом ускорителе, как показано в предыдущей работе, условием этого является

$$qE_s/H_s \ll \min\left\{q^{4/3}, |1-n|\,\gamma^2\beta_s^2\right\}.$$

где $\min\{a, b\}$ – меньшая из величин a и b).

Уравнения движения, вытекающие из гамильтониана 4.17, совпадают в этом случае с уравнениями, полученными в[I]:

$$d^2x/d\theta^2 + K^2(1-n)\,x/K_0^2 = qKP_\varphi/K_0 p \qquad 4.18$$

$$d^2z/d\theta^2 + K^2 n\, z/K_0^2 = 0 \qquad 4.19$$

$$d\varphi/d\theta + qKx = (q\omega_0/c)^2 P_\varphi/K_0 p \beta_s^2 \gamma^2 \qquad 4.20$$

$$dP_\varphi/d\theta = \frac{ef\sin\phi_s}{\omega_0}\varphi \qquad 4.21$$

Связь радиальных и продольных колебаний, описываемая перекрестным членом в гамильтониане с коэффициентом α_5, изменяет их частоты. Эти частоты можно найти приведя гамильтониан к диагональному виду, что достигается с помощью следующего канонического преобразования (коэффициенты которого могут зависеть от независимой переменной θ)[I]:

$$\begin{aligned} Q_1 &= x + DP_\varphi; & P_1 &= \frac{\varphi + BP_x}{B - D}; \\ Q_2 &= \varphi + DP_x; & P_2 &= \frac{x + BP_\varphi}{B - D}; \\ Q_3 &= z; & P_3 &= P_z. \end{aligned} \qquad 4.22$$

Нетрудно убедиться, что скобки Пуассона новых переменных удовлетворяют требованиям каноничности $\{Q_i, Q_j\} = 0$;

$$\{P_i, P_j\} = 0; \qquad \{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}.$$

Коэффициенты B и D преобразования 4.22, а также эффективные "массы" и " частоты " колебаний M_i, ω_i ($i = 1,2,3$) определяются совместно из системы восьми уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при P_x^2; x^2; P_z^2, z^2, P_φ^2;

φ^2; $P_\varphi x$, $P_x\varphi$

в уравнении

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{P_i^2}{2M_i} + \frac{M_i\omega_i^2 Q_i^2}{2}\right),$$

где $\hat{\mathcal{H}}$ определен в 4.17, а P_i, Q_i в 4.22. "Масса" и "частота" аксиальных колебаний, не зависящих от двух остальных степеней свободы, определяются сразу:

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{1}{\alpha_1} = K_0 p; \\ \omega_3^2 &= \alpha_1\alpha_6 = \frac{K^2}{K_0^2} n, \end{aligned} \qquad 4.23$$

а соответствующее уравнение движения совпадает с 4.19.

Из оставшейся системы 6 уравнений можно сначала найти коэффициент D

$$D = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4}{2\alpha_4\alpha_5} \mp \sqrt{\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4}{2\alpha_4\alpha_5}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_4}} \qquad 4.24$$

через который выражаются массы и частоты:

$$M_1 = (\alpha_1 + \alpha_4 D^2)^{-1}, \qquad 4.25$$

$$M_2 = M_1 \alpha_1 (\alpha_3 + \alpha_5 D)^{-1}, \qquad 4.26$$

$$\omega_1^2 = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_4 \alpha_5 D, \qquad 4.27$$

$$\omega_2^2 = \alpha_4 (\alpha_3 + \alpha_5 D) \qquad 4.28$$

Соответствующие им уравнения движения имеют вид

$$d^2 Q_1 / d\theta^2 + \omega_1^2 Q_1 = 0, \qquad 4.29$$

$$d^2 Q_2 / d\theta^2 + \omega_2^2 Q_2 = 0 \qquad 4.30$$

Коэффициенты уравнений 4.I9, 4.29 и 4.30 зависят от θ. Если эта зависимость (связанная с зависимостью K и n от θ) имеет периодический характер, то соответствующие числа колебаний находятся по теории уравнений Хилла.

5. Случай слабой связи

Рассмотрим сначала случай, когда в силу малости коэффициента α_5 первое слагаемое под корнем в 4.24 много больше второго (случай слабой связи).

Подставив в неравенство $(\alpha_1\alpha_2/\alpha_4\alpha_5)^2 > \alpha_1/\alpha_4$ значения коэффициентов 4.II-4.I6, получим условие слабой связи:

$$\left| \frac{qE_s \sin\phi_s}{\beta_s H_s} \right| < \left| \frac{K}{K_0}(1-n)^2 \right|, \qquad 5.I$$

где $E_s = qK_0 f$ – амплитудное значение E_θ на равновесной орбите (см.3.I0).

При выполнении неравенства 5.I коэффициент $D = -\alpha_5/\alpha_2$, а частоты соответственно

$$\omega_1^2 = \frac{K^2}{K_0^2}(1-n)\left[1 + \frac{qE_s \sin\phi_s}{\beta H_s (1-n)^2}\,\frac{K_0}{K}\right] \qquad 5.2$$

$$\omega_2^2 = \frac{qeV \sin\phi_s}{2\pi E \beta_s^2}\,\mathcal{H}, \qquad 5.3$$

где $V = E_s L$, а $\mathcal{H} = \frac{1}{1-n} - \frac{1}{\gamma^2}$. При $n = const$, $K = K_0 = const$ выражения 5.2 и 5.3 представляют собой квадраты чисел радиальных и продольных колебаний[I], причем в силу 5.I второе слагаемое в 5.2 является малой поправкой к частоте радиальных колебаний.

В случае же $K, n \neq const$ $|n| \gg 1, \omega_2 \ll 1$ и потому $\mathcal{H}$ можно заменить его средним значением.

Введем, как обычно периодическую функцию ψ согласно соотношению $X_{пар} = \psi \frac{qK_0}{P} P_\varphi$.

Из 4.I8 получается уравнение для ψ

$$d^2\psi / d\theta^2 + \frac{K^2}{K_0}(1-n)\psi = \frac{K}{K_0^2}; \qquad 5.4$$

из которого сразу следует, что $\overline{(1-n)^{-1}} = \overline{K\psi} = \alpha$,

где α – обычный коэффициент упаковки орбит.

Таким образом среднее значение 5.3 совпадает с известным выражением для числа продольных колебаний, а случай слабой связи соответствует условиям и соотношениям, имеющим место в обычных кольцевых ускорителях.

6. Случай сильной связи

В обратном предельном случае

$$\left|\frac{K}{K_0}(1-n)^2\right| < \left|\frac{qE_s \sin\phi_s}{\beta_s H_s}\right| \qquad 6.I$$

коэффициент $D = \sqrt{\alpha_1/\alpha_4}$. Выражения для квадратов частот ω_1^2 и ω_2^2 отличаются теперь лишь знаком:

$$\omega_1^2 = -\alpha_5\sqrt{\alpha_1\alpha_4},$$
$$\omega_2^2 = \alpha_5\sqrt{\alpha_1\alpha_4},$$

или

$$\omega_1^2 = -\frac{K}{K_0}\sqrt{\frac{qE_s\sin\phi_s|K|}{\beta_s|H_s|K_0}}, \qquad 6.2$$

$$\omega_2^2 = \frac{K}{K_0}\sqrt{\frac{qE_s\sin\phi_s|K|}{\beta_s|H_s|K_0}}. \qquad 6.3$$

В ускорителе, в котором K знакопостоянно, радиальное движение оказывается неустойчивым (если продольное устойчиво). Неустойчивость этого типа, обнаруженная для аксиально-симметричного ускорителя в предыдущей работе, имеет ту же природу, что и неустойчивость поперечного движения в линейном ускорителе и является следствием известной теоремы Ирншоу.

Заметим, что в линейном ускорителе $H_s \to 0$ и потому неравенство 6.I выполнимо всегда.

Вид формул 6.2 и 6.3 указывает на то, что в ускорителе со знакопеременным $K(\theta)$ существуют области значений параметров, в которых одновременно устойчивы оба типа колебаний.
Здесь имеется полная аналогия с теорией поперечных колебаний в ускорителе с жесткой фокусировкой. Используя развитую для таких ускорителей методику можно в каждом случае найти границы облас-

тей устойчивости, функции Флоке, частоты колебаний и т.д.

Ограничимся здесь лишь тем, что найдем середины областей устойчивости в простом случае, когда на длине L ускорителя укладывается N одинаковых периодов, каждый из которых состоит из двух равных участков, поворачивающих равновесную орбиту на углы равные $\pm\Theta$. В таком случае, как было показано выше $K/K_0 = N\Theta/\pi$. Перейдем кроме того от переменной θ (изменяющейся на 2π на длине ускорителя) к переменной $\chi = N\theta$, изменяющейся на 2π на длине одного периода:

$$d^2Q_1/d\chi^2 - (\mathrm{sign}\,K)\,\omega^2(\chi)\,Q_1 = 0,$$
$$d^2Q_2/d\chi^2 + (\mathrm{sign}\,K)\,\omega^2(\chi)\,Q_2 = 0,$$

где $\mathrm{sign}\,K$ – означает знак $K(\chi)$, а

$$\omega = \left[\frac{qE_s\sin\phi_s}{\beta|H_s|N}\left(\frac{\Theta}{\pi}\right)^3\right]^{1/4} \qquad 6.4$$

В этих предположениях середина области устойчивости с номером m (для Q_1 и Q_2) определяется из уравнения $\omega = m + 1/2$

$$\frac{qE_s\sin\phi_s}{\beta_s|H_s|N}\left(\frac{\Theta}{\pi}\right)^3 = \left(m + 1/2\right)^4, \quad m = 0, 1, \ldots \qquad 6.5$$

Поскольку, одновременно, должно выполняться неравенство 6.I, то отсюда вытекает ограничение на величину Θ. Так для первой области устойчивости ($m = 0$) оно имеет вид

$$1 - n < \left(\frac{\pi}{2\Theta}\right)^2. \qquad 6.6$$

Число колебаний на длине ускорителя в середине области устойчивости, равно $N/4$, т.е. может быть достаточно большим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. "Теория циклических ускорителей", Физматгиз, М.1962 г.