ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-УФТ-1(70)

Г.Г.МАНАСЯН

ПРЕДЕЛ ПРИМЕНИМОСТИ АДИАБАТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ В МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕМСЯ ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

АРУС

ԵՐԵՎԱՆ 1970 ЕРЕВАН

М-26

G.G.Manassian

LIMIT OF THE VALIDITY OF THE ADIABATIC INVARIANTS IN A SLOWLY VARYING LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

ABSTRACT

The upper limit of the inhomogeneity of the magnetic field at which the adiabatic condition is violated is found by numerical integration of the charged particle motion equations in a quasihomogeneous slowly varying longitudinal magnetic field.

С помощью численного интегрирования уравнений движения заряжённой частицы в квазиоднородном, медленно меняющемся продольном магнитном поле найден верхний предел неоднородности магнитного поля, при котором условие адиабатичности не нарушается.

Как известно, при движении в медленно меняющихся полях остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты [I]. При движении в квазиоднородном магнитном поле, которое удовлетворяет условию

$$K = \frac{E}{eH^2}\frac{\partial H}{\partial z} \ll 1 \qquad (1)$$

(где E - полная энергия частиц, H - напряженность магнитного поля), адиабатическим инвариантом является

$$J_{inv.} = \frac{V_\perp^2}{H} \qquad (2)$$

где $V_\perp$ - поперечная скорость частиц.

Целью данной работы является нахождение верхнего предела неоднородности магнитного поля, при котором условие адиабатичности не нарушается. Большой практический интерес представляет случай, когда K во время движения остается постоянной.

Из условия (I) видно, что для того, чтобы величина K оставалась постоянной, необходимо, чтобы магнитное поле на оси изменялось по закону:

$$H(z) = \frac{H_0}{1+\alpha z} \qquad (3)$$

H_0 -напряженность магнитного поля в точке $z = 0$, где α -постоянное число. При движении в таком магнитном поле условием адиабатичности является

$$K = K_0\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) << 1 \qquad (4), \text{ где } K_0 = \frac{E\alpha}{a_3 H_0}{}^*$$

θ - угол между силовыми линиями и скоростью частицы.

Для получения критерия адиабатичности сравним величину $\frac{V_\perp^2(z)}{H(z)}$, которая получается при численном решении уравнения движения частиц в квазиоднородном магнитном поле, с адиабатическим инвариантом $\frac{V_\perp^2}{H_0}$.

Как известно [2] уравнение движения частицы в магнитном поле имеет вид:

$$\frac{d\vec V}{dt} = \frac{ec}{E}[VH] \qquad (5)$$

Введем правую тройку взаимно-перпендикулярных единичных векторов:

$$\vec h = \frac{\vec H}{H} \qquad \vec n_1 = [\vec n_2 \vec h]; \quad \vec n_2 = [\vec h \vec n_1] \qquad \vec h = [\vec n_1 \vec n_2],$$

т $\vec h$ направлен вдоль магнитного поля, а $\vec n_1$ - вдоль попереч- скорости частицы.

жим $\vec V$ по ортам n_1 и $\vec h$:

$$\vec V = V_\parallel \vec h + V_\perp n_1 . \qquad (6)$$

рим движение частицы в магнитном поле с радиус-вектором ларморовой окружности $\vec R$ и радиус-вектором частицы $\vec z$,

$$V_\perp = [\vec\omega(\vec z - \vec R)], \quad \text{где} \quad \omega = \frac{ec\vec H}{\varepsilon}$$

Отсюда видно, что

$$\vec R = \vec z + \frac{E}{ecH^2}[\vec V_\perp \vec H]. \qquad (7)$$

Подставляя в (7) $\vec H = \vec h H$; $\vec V_\perp = \vec n_1 V_\perp$ получим

$$\vec R = \vec z - \frac{E V_\perp}{ecH}\vec n_2 .$$

Из последнего выражения следует, что $\vec n_2$ направлен по радиусу от центра ларморовой окружности.

Подставляя (6) в (5), получим:

$$\frac{dV_\parallel}{dt}\vec h + V_\parallel\frac{d\vec h}{dt} + \frac{dV_\perp}{dt}\vec n_1 + V_\perp\frac{d\vec n_1}{dt} = \frac{ecV_\perp}{\varepsilon}[\vec n \vec H]. \qquad (8)$$

Умножая уравнение (8) на $\vec h$ и $\vec n_1$ получим уравнения соответственно для $\frac{dV_\parallel}{dt}$ и $\frac{dV_\perp}{dt}$ [3]

$$\frac{dV_\parallel}{dt} = V_\perp\left(\vec n_1 \frac{d\vec h}{dt}\right)$$

$$\frac{dV_\perp}{dt} = -V_\parallel\left(\vec n_1 \frac{d\vec h}{dt}\right) . \qquad (9)$$

Здесь использовано тождество $\vec h\frac{d\vec n_1}{dt} + \vec n_1\frac{d\vec h}{dt} = 0$

Учитывая, что для любого вектора справедливо соотношение

$$\frac{d\vec A}{dt} = \frac{\partial\vec A}{\partial t} + (\vec V\nabla)\vec A = \frac{\partial\vec A}{\partial t} + V_\parallel(\vec h\vec\nabla)\vec A + V_\perp(\vec n_1\vec\nabla)\vec A$$

уравнение (9) можно записать в виде

$$\dot V_\parallel = V_\perp V_\parallel \vec n_1(\vec h\nabla)\vec h + V_\perp^2 \vec n_1(\vec n_1\nabla)\vec h + V_\perp\left(\vec n_1\frac{\partial\vec h}{\partial t}\right)$$

$$\dot V_\perp = -V_\parallel^2 \vec n_1(\vec h\nabla)\vec h - V_\perp V_\parallel \vec n_1(\vec n_1\nabla)\vec h - V_\parallel\left(\vec n_1\frac{\partial\vec h}{\partial t}\right) \qquad (10)$$

Для магнитных полей, не зависящих от времени, уравнения (I0) приобретают вид[4]:

$$V_\parallel = V_\parallel V_\perp \vec{n}_1 (\vec{h}\nabla)\vec{h} + V_\perp^2 \, div\,\vec{h} - V_\perp^2 \vec{n}_2 (\vec{n}_2 \nabla)\vec{h}$$

$$\dot{V}_\perp = -V_\parallel^2 \vec{n}_1 (\vec{h}\nabla)\vec{h} - V_\perp V_\parallel \, div\,\vec{h} + V_\perp V_\parallel \vec{n}_2 (\vec{n}_2 \nabla)\vec{h} \,. \qquad (II)$$

При получении этих уравнений было учтено соотношение *)

$$div\,\vec{h} = \vec{n}_1 (\vec{n}_1 \nabla)\vec{h} + \vec{n}_2 (\vec{n}_2 \nabla)\vec{h} \qquad (I2)$$

Найдем уравнения для $\vec{n}_1(t)$ и $\vec{n}_2(t)$

По определению

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{V}_\perp}{|V_\perp|} = \frac{\vec{V} - \vec{V}_\parallel \vec{h}}{|V_\perp|} \,. \qquad (I3)$$

Дифференцируя это выражение по времени и используя уравнения (5) и (I0), получим

$$\frac{d\vec{n}_1}{dt} = -\omega_H n_2 \qquad (I4)$$
$$\frac{d\vec{n}_2}{dt} = \omega_H n_1 \,,$$

где $\omega_H = \frac{ecH(z)}{E}$ -мгновенная ларморова частота.

Для численного решения уравнений (II) и (I4) удобно перейти к декартовой системе координат так, чтобы ось z была бы направлена вдоль вектора $\vec{h}$, а x и y (с ортами i, j соответственно) - вдоль направлений векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ в момент $t = 0$. Тогда:

---

*) В общем случае $div\,\vec{A} = \vec{n}_1 (\vec{n}_1 \nabla)\vec{A} + \vec{n}_2 (\vec{n}_2 \nabla)\vec{A} + \vec{n}(\vec{h}\nabla)\vec{A}$
Но если $\vec{A}$ вектор постоянной длины ($A^2 = const$), то $(\vec{h}\nabla)A$ есть вектор, перпендикулярный к $\vec{A}$, откуда и следует тождество (I2).

$$\vec{n}_1 = \vec{i}\cos\omega_n t + j\sin\omega_n t$$

$$\vec{n}_2 = -i\sin\omega_n t + j\cos\omega_n t$$

$$\vec{n}_1(\vec{n}_1\nabla)\vec{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_y}{\partial y}\right)\cos 2\omega t + $$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_y}{\partial x} + \frac{\partial h_x}{\partial y}\right)\sin 2\omega_n t \,;$$

$$\vec{n}_2(\vec{n}_2\nabla)\vec{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_y}{\partial y}\right)\cos 2\omega_n t - $$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\right)\sin 2\omega_n t \,;$$

$$\vec{n}_1(\vec{h}\nabla)h = h_x\left(\frac{\partial h_x}{\partial x}\cos\omega_n t + \frac{\partial h_y}{\partial x}\sin\omega_n t\right) + $$
$$+ h_y\left(\frac{\partial H_y}{\partial y}\cos\omega_n t + \frac{\partial h_y}{\partial x}\sin\omega_n t\right) + h_z\left(\frac{\partial h_x}{\partial z}\cos\omega_n t + \frac{\partial h_y}{\partial z}\sin\omega_n t\right).$$

Учитывая уравнение Максвелла, получим: $(div\,\vec{H} = 0;\ rot\,\vec{H} = 0)$

$$div\,\vec{h} = H_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + H_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + H_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)$$
$$\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = H_z \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) - H_y \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)$$
$$\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = H_x \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) - H_z \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) \qquad (I5)$$
$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = H_y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) - H_x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right).$$

Для определения предела применимости адиабатических инвариантов произведено численное решение уравнений (II) для различных начальных поперечных скоростей и начальных напряженностей магнитного поля.

На рис. I÷9 приведены расчетные значения величины $\frac{V_\perp^2(z)}{H(z)}$ и приближенных инвариантов $\frac{V_{\perp 0}^2}{H_0}$. Из этих графиков видно, что при $H_0 \geq$ 60кгс, $\mathcal{E}_0 \leq$ 50мэв адиабатичность с точностью 0,2% сохраняется, если $K_0 \leq$ 0,033.

Для продольно меняющихся магнитных полей предельные значения K_0 увеличиваются с увеличением поперечной скорости частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.А.Курскал , Адиабатические инварианты. М.Изд-во иностр. лит. 1962.
2. Л.Д.Ландау , Е.М.Лифшиц , Теория поля. М.Физматгиз, 1960.
3. Н.Н.Боголюбов, Ю.А. Митропольский , Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний , М.Физматгиз, 1963.
4. А.В.Сивухин, Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях, "Вопросы теории плазмы" , вып.1. М.Госатомиздат 1963.

Рукопись поступила 7-го октября 1970г.

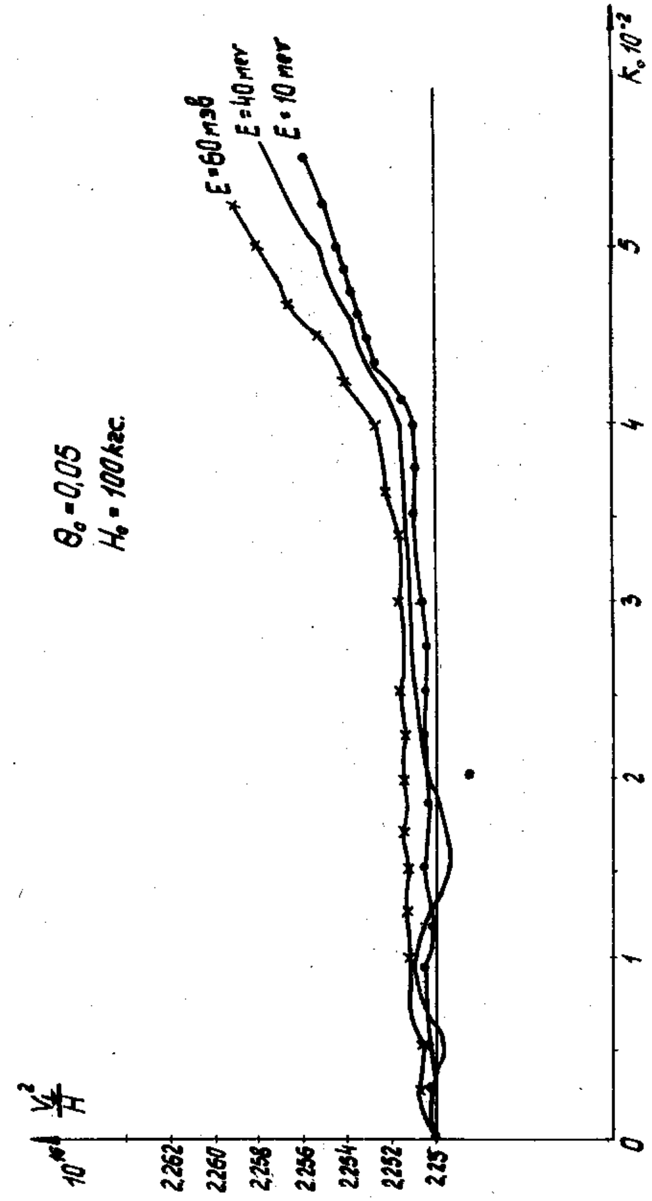


Рис.1

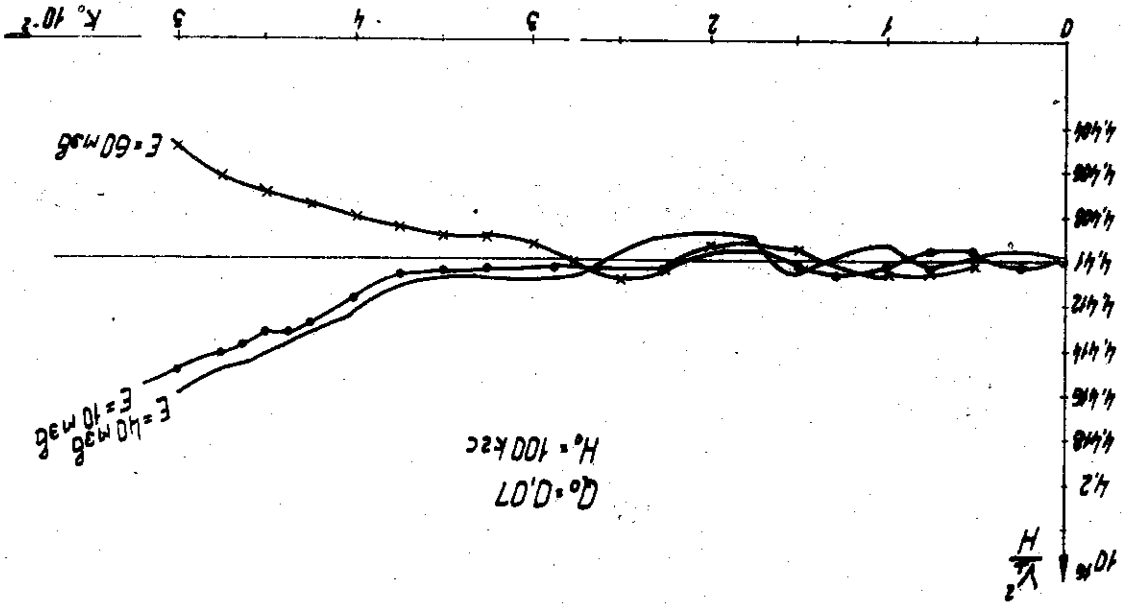

$\theta_0 = 0{,}07$
$H_0 = 100$ кэс
E = 40 мэв
E = 10 мэв
E = 60 мэв
$\frac{V_n^2}{H}$
10^{16}
$K_0 \cdot 10^{-2}$

Рис. 2

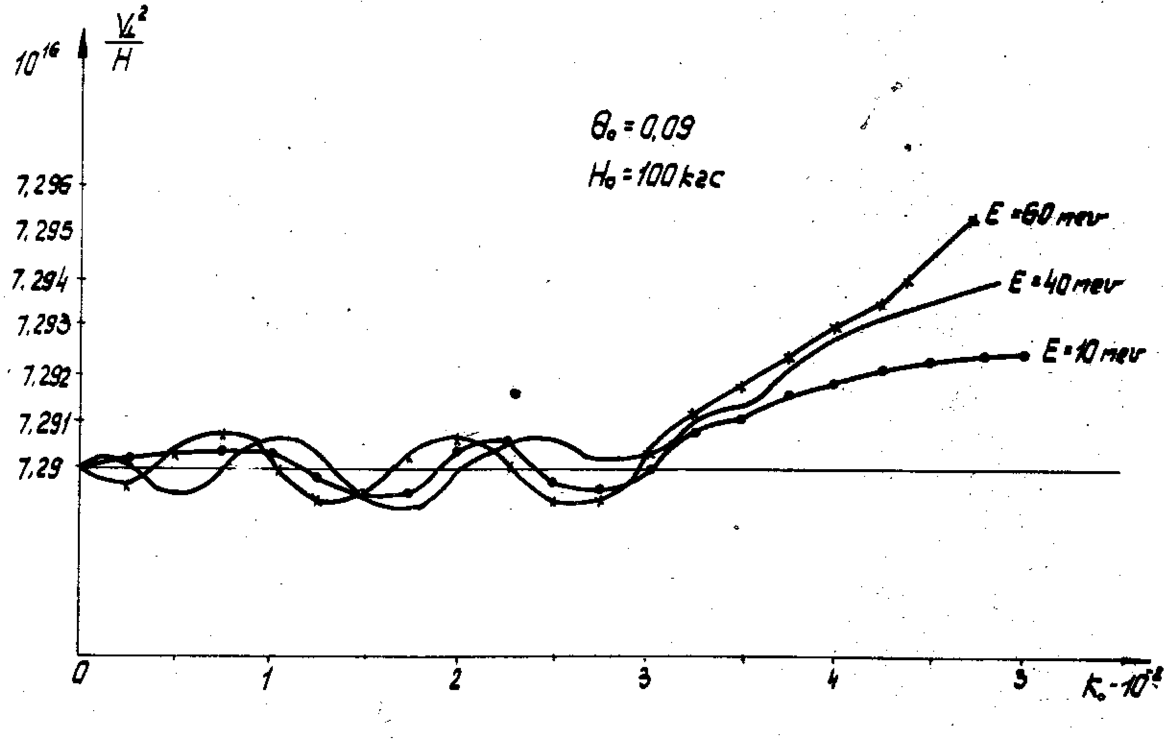
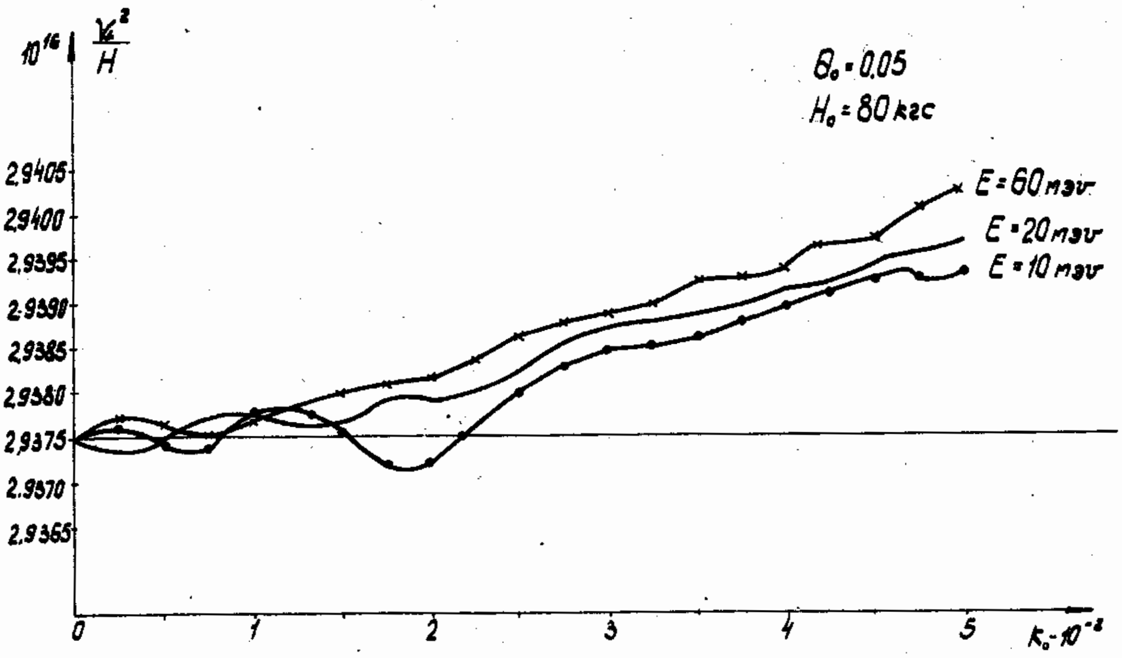
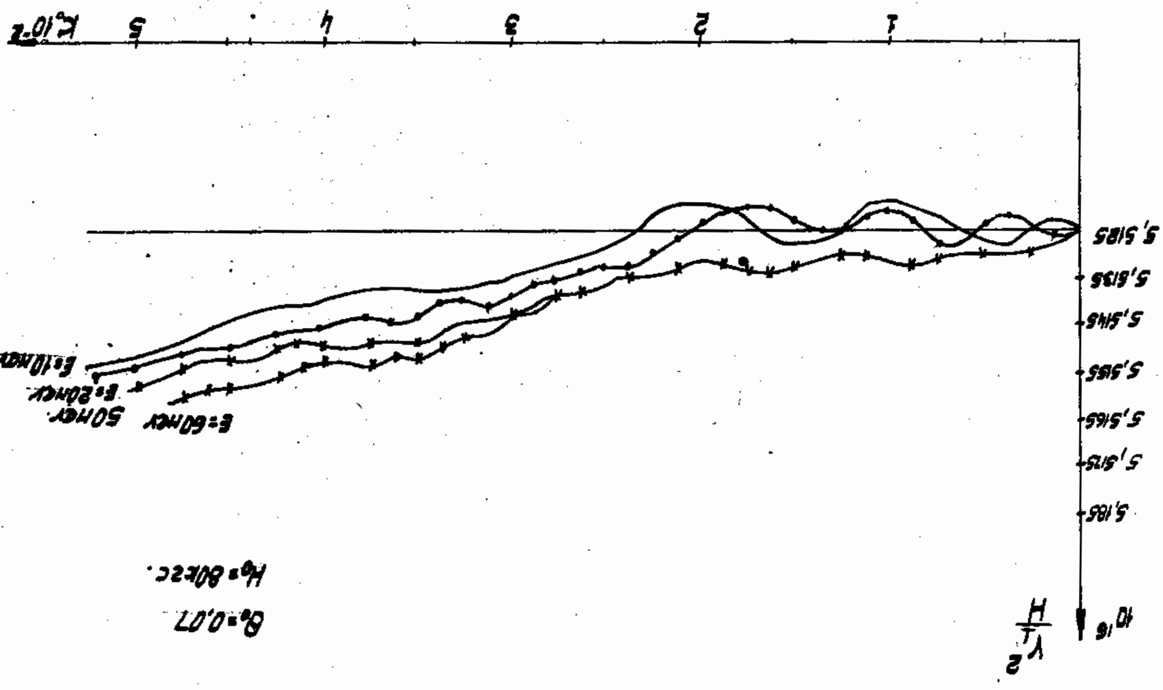

$\theta_0 = 0{,}09$
$H_0 = 100$ кэс
E = 60 mev
E = 40 mev
E = 10 mev
$\frac{V_n^2}{H}$
10^{16}
7,296
7,295
7,294
7,293
7,292
7,291
7,29
$K_0 \cdot 10^{-2}$

Рис. 3.



10^{16} $\frac{V_t^2}{H}$
2,9405
2,9400
2,9395
2,9390
2,9385
2,9380
2,9375
2,9370
2,9365
$\theta_0 = 0{,}05$
$H_0 = 80$ кгс
E = 60 мэв
E = 20 мэв
E = 10 мэв
0
1
2
3
4
5
$k_0 \cdot 10^{-2}$

Рис.4.



10^{16} $\frac{V_t^2}{H}$
$\theta_0 = 0{,}07$
$H_0 = 80$ кгс.
E = 60 мэв
50 мэв
E = 20 мэв
E = 10 мэв
1
2
3
4
5
$K_0 10^{-2}$

РИС. 5

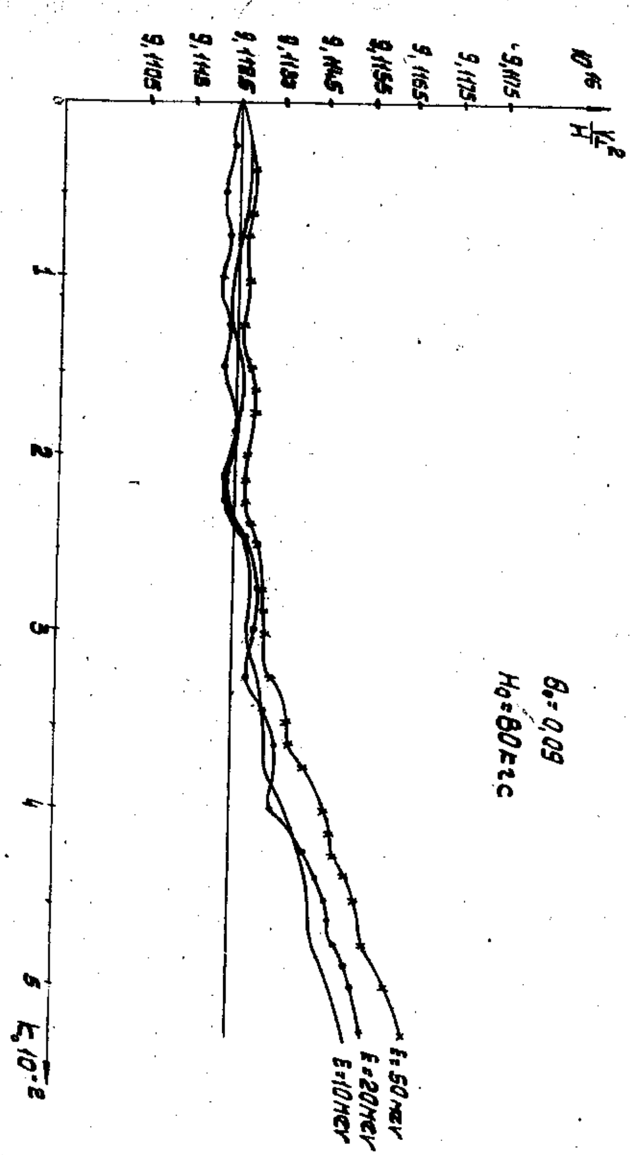

$\theta_0 = 0{,}09$
$H_0 = 80$ кгс
E=10 MeV
E=20 MeV
E=50 MeV

Рис. 6

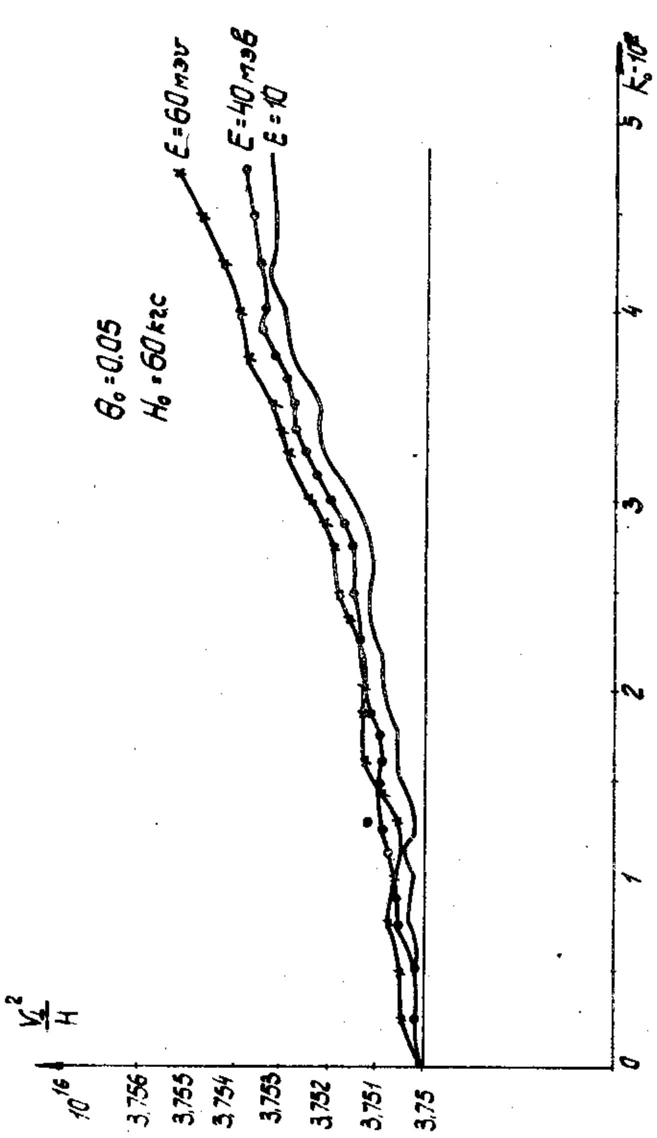
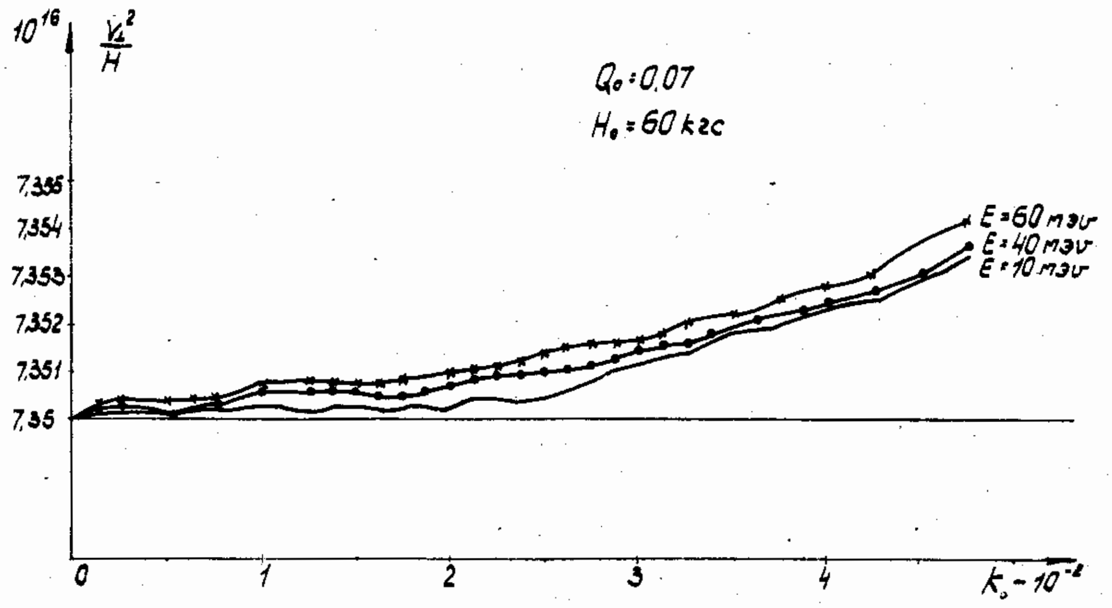
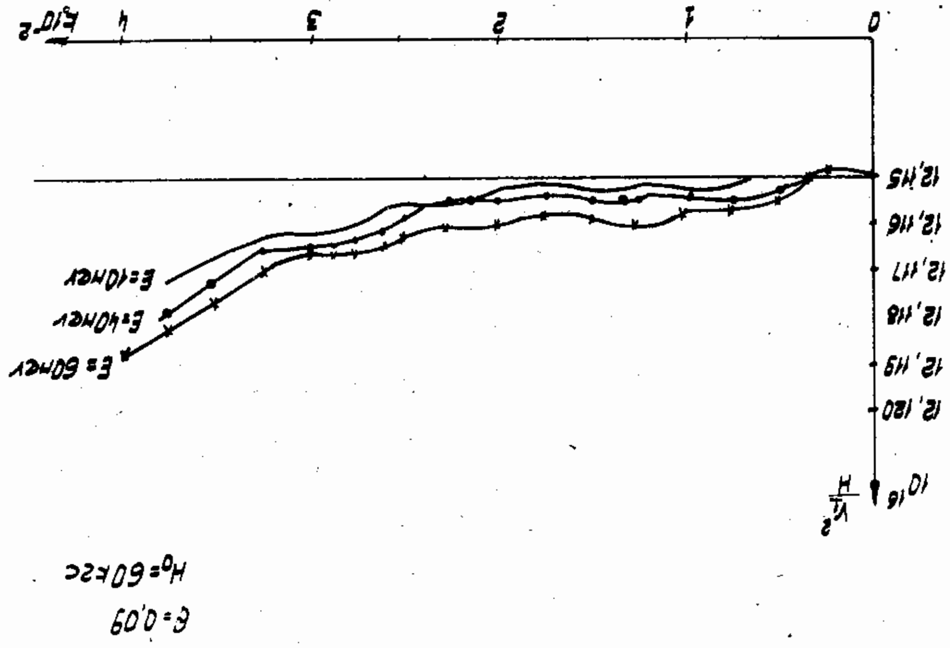

$\theta_0 = 0{,}05$
$H_0 = 60$ кгс
E=60 мэв
E=40 мэв
E=10
3,75
3,751
3,752
3,753
3,754
3,755
3,756
10^{16}
$\frac{V_\perp^2}{H}$

Рис. 7



10^{16} $\frac{V_L^2}{H}$
$Q_0 = 0.07$
$H_0 = 60$ кгс
7,355
7,354
7,353
7,352
7,351
7,35
E = 60 мэв
E = 40 мэв
E = 10 мэв
0
1
2
3
4
$K_0 - 10^{-2}$

Рис. 8.



10^{16} $\frac{V_L^2}{H}$
12,120
12,119
12,118
12,117
12,116
12,115
E = 60 мэв
E = 40 мэв
E = 10 мэв
0
1
2
3
4
$K \cdot 10^{-2}$
$\varepsilon = 0.09$
$H_0 = 60$ кгс

Рис. 9