Заказ I98 ФВ 03448 Тираж 200

Множительно-копировальный сектор, Ереванского физического института, Ереван 36, Маркаряна 2

ЕРЕВАНСКИЙ
ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ЕРФИ-ТФ-6 (68)

Г.М.ГАРИБЯН, М.М.МУРАДЯН

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНУ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

ЕРЕВАН
I968

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-ТФ-6 (68)

Г.М.ГАРИБЯН. М.М.МУРАДЯН

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНУ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

ЕРЕВАН 1968

Рассматривается перпендикулярный пролет крайне-релятивистской заряженной частицы через пластину вещества. Для вычисления электромагнитных потерь энергии частицы, в этой пластине, указан математический прием, который позволяет применить в этих расчетах метод интегрирования Ландау.

Полученная таким образом общая формула дает искомые потери энергии в пластине произвольной толщины, которые в крайних случаях малых и больших толщин пластины переходят в известные выражения.

Как известно, вычисление электромагнитных потерь энергии заряженной частицы пролетающей через пластину, доведено до конца только в крайних случаях малых и больших толщин пластины [I]. В первом случае, было установлено отсутствие эффекта плотности Ферми (наблюденное затем и экспериментально [2]), а во-втором, - образование переходного излучения независимо на каждой из границ пластинки.

В случае пластины произвольной толщины потери энергии выражаются через двукратный интеграл достаточно сложного вида. В работе [I] (см. также [3], [4]), например, для получения результата в случае малых толщин пластины подынтегральное выражение разлагалось в ряд по толщине пластины и интегрирование линейного члена, которое проводилось методом Ландау [5], приводило к упомянутому эффекту. Такой способ расчета был вызван тем обстоятельством, что в случае пластины произвольной толщины метод интегрирования Ландау не проходил из-за наличия в подынтегральном выражении экспонент, расходящихся на бесконечно удаленной верхней полуокружности в плоскости комплексной переменной ω. В работе [6] была сделана первая попытка взять такого типа интегралы, однако на толщину пластины авторы были вынуждены наложить некоторое условие.

В настоящей работе выражение для потерь энергии крайне-релятивистских частиц интегрируется без каких-либо ограничений на толщину пластинки. Для этого был найден некоторый математический приём, который позволил применить в этих расчетах метод интегрирования Ландау. Полученная таким образом общая формула дает искомые потери энергии и в крайних случаях малых и больших толщин переходит в известные результаты.

В случаях малых толщин пластины помимо линейного члена интерес представляет также и член, квадратичный по толщине пластины. Знание его необходимо для определения верхней границы толщины пластины, выше которой начинается эффект плотности Ферми. В работе [4] утверждалось, что в случае квадратичного члена операции интегрирования и разложения в ряд по толщине пластины не переставимы. Из анализа общей формулы в настоящей работе показывается, что квадратичный член, полученный обеими способами, оказывается одним и тем же.

1. при пролете частицы с зарядом e, движущейся со скоростью v перпендикулярно через пластину толщины a, будут генерироваться поля излучения как внутри пластины, так и вне её. Вычислив эти поля (например, см. [7]), можно затем найти выражение для работы сил этих полей излучения над частицей на всем пути её движения в следующем виде [3], [6]:

$$W = -\frac{2e^2}{\pi v^2}\int_0^{\varkappa_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varkappa^3 d\varkappa\, \omega d\omega}{(\rho^+)^2-(\rho^-)^2 e^{2i\lambda a}}\Big\{\Big[\rho^+\alpha^+ - \rho^-\alpha^- e^{2i\lambda a}\Big] - \frac{\varepsilon}{\lambda}\Big[(\gamma^+)^2 e^{i(\lambda-\frac{\omega}{v})a} + (\gamma^-)^2 e^{i(\lambda+\frac{\omega}{v})a}\Big]\Big\} \qquad \text{(I)}$$

где
$$\alpha^{\pm} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{\Lambda_0^2\,\Lambda^2}\left[\frac{\omega^2}{c^2}\beta^2 \pm \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon-\Lambda_0\right)^2}{\varepsilon\lambda_0\lambda}\right]$$

$$\gamma^{\pm} = \frac{1-\varepsilon}{\Lambda_0\Lambda}\left(\frac{\omega}{c}\beta \pm \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon-\Lambda_0}{\varepsilon\lambda_0}\right); \quad \rho^{\pm} = \frac{\varepsilon}{\lambda} \pm \frac{1}{\lambda_0}; \quad \Lambda_0 = K^2 - \frac{\omega^2}{c^2};$$

$$\Lambda = K^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon; \quad K^2 = \varkappa^2 + \frac{\omega^2}{v^2}; \quad \lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2; \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa^2; \quad \beta = \frac{v}{c};$$

Величина $\varkappa_0$ определяется пределами применимости макроскопического рассмотрения. Мнимую часть λ_0 будем считать положительной во всей комплексной плоскости ω. Тогда действительная часть λ_0 в верхней полуплоскости будет положительной при $\omega > 0$ и отрицательной при $\omega < 0$, а в нижней полуплоскости положительна при $\omega < 0$, отрицательна при $\omega > 0$.

Так как Λ не обращается в нуль в верхней полуплоскости комплексной переменной ω, то для того, чтобы исключить двузначность подынтегральной функции, возникающую из-за наличия нулей λ_0, необходимо произвести разрез вдоль действительной оси от $-\infty$ до $-c\varkappa$ и от $+c\varkappa$ до $+\infty$ и интегрирование про-

изводить по верхнему берегу разреза.

Для удобства представим (I) в виде

$$W = W_1 + W_2 \qquad (2)$$

где W_1 – определяется первой квадратной скобкой выражения (I), а W_2 – второй.

2. Для вычисления W_1, прежде всего отметим, что выражение $(\rho^+)^2-(\rho^-)^2 e^{2i\lambda a}$ не имеет нулей в верхней полуплоскости ω, в чем можно убедится используя теорему Руше (см. [6] [8]). Следовательно полюса выражения (I) будут находится только в тех точках, где обращаются в нуль Λ_0 и Λ.

Используя обычный метод Ландау [5], для W_1 получаем (см. также [6]):

$$W_1 = -\frac{2e^2\sqrt{G}}{3c\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3)$$

где $G = \frac{4\pi N e^2}{m}$, N число электронов в единице объёма, m – масса электрона. При вычислении W_1 частица считалась релятивистской, т.е.

$$\beta = \frac{v}{c} \to 1 \qquad (4)$$

и были отброшены члены убывающие с энергией частицы.

3. Для вычисления W_2 мы не можем просто применить обычный метод интегрирования Ландау [5], т.е. замкнуть путь интегрирования по действительной оси ω верхней полуокружностью бесконечно большого радиуса, поскольку подынтегриальное выражение на этой полуокружности, из-за наличия $exp(i(\lambda-\frac{\omega}{v})a]$, осциллирует с бесконечно большой амплитудой. Для преодоления этой трудности во второй квадратной скобке выражения (I) добавим и вычтем один и тот же член $(\gamma^+)^2 exp[i(\lambda-\frac{\omega}{c})a]$.
В результате W_2 запишем в виде:

$$W_2 = W_2' + \Delta \qquad (5)$$

$$W_2' = \frac{2e^2}{\pi v^2}\int_0^{\varkappa_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^3 d\varkappa\,\omega\, d\omega\,\frac{\varepsilon}{\lambda}}{(\rho^+)^2-(\rho^-)^2\exp(2i\lambda a)}\left[(\gamma^+)^2 e^{i(\lambda-\frac{\omega}{c})a}+(\gamma^-)^2 e^{i(\lambda+\frac{\omega}{v})a}\right] \tag{6}$$

$$\Delta = \frac{2e^2}{\pi v^2}\int_0^{\varkappa_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^3 d\varkappa\,\omega\, d\omega\,\frac{\varepsilon}{\lambda}}{(\rho^+)^2-(\rho^-)^2\exp(2i\lambda a)}(\gamma^+)^2\left[e^{i(\lambda-\frac{\omega}{v})a}-e^{+i(\lambda-\frac{\omega}{c})a}\right] \tag{7}$$

Покажем, что при выполнении условия (4) величиной Δ можно пренебречь относительно W_2'.

4. Для вычисления Δ замкнем путь интегрирования в верхней полуплоскости ω окружностью такого большого радиуса, чтобы на ней ε можно было бы представить как $\varepsilon = 1-\frac{\sigma}{\omega^2}$ и подынтегральное выражение упростить.

Тогда

$$\Delta = \Delta_c + 2\pi i \sum Res \tag{8}$$

где $\sum Res$ – сумма вычетов подынтегрального выражения формулы (7) в верхней полуплоскости, а

$$\Delta_c = \frac{2e^2}{\pi c}\left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2\int_0^{\varkappa_0}\int_C \frac{\varkappa^3 d\varkappa\, d\omega}{\Lambda_0'^2\,\Lambda'^2}\left[e^{i(\mu-\frac{\omega}{v})a}-e^{i(\mu-\frac{\omega}{c})a}\right] \tag{9}$$

C – контур интегрирования, показанный сплошной линией на рис. I;

$$\Lambda_0' = \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)+\varkappa^2; \quad \Lambda' = \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2;$$

$$\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\sigma}{c^2}-\varkappa^2; \qquad \mu = \mu' + i\mu''.$$

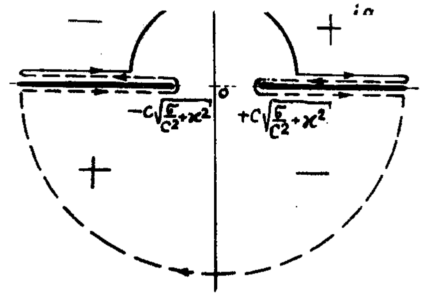

Рис 1

Определим $\mu'' > 0$ на всей плоскости комплексной переменной ω, тогда знаки μ' в соответствующих четвертях получатся такими, как это показано на рис. I.

Для того, чтобы подынтегральная функция Δ_c стала однозначной в плоскости ω, сделаем разрезы, возникающие из-за нулей μ, так как это показано на рис. I жирными линиями. Замкнем контур C нижней полуокружностью бесконечно большого радиуса, сделав соответствующий обход разрезов (см. пунктирную линию на рис. I). Интеграл по нижней бесконечной полуокружности равняется нулю, поскольку на ней подынтегральная функция экспоненциально затухает. Таким образом выражение Δ_c будет равно сумме вычетов в верхней и нижней полуплоскостях и интеграду вдоль разрезов. Вычеты в верхней полуплоскости, обязанные нулям Λ'^2 сокращаются с соответствующими вычетами второго члена формулы (8). Вычеты же $\Lambda_0'^2$ в верхней полуплоскости вместе с аналогичными вычетами второго члена формулы (8) пренебрежимо малы относительно W_2', при выполнении условия (4). Вычеты выражения Δ_c в нижней полуплоскости экспоненциально затухают как $exp\left[-\frac{a\varkappa_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right]$ или убывают с энергией частицы. Следовательно Δ будет равняться интегралу вдоль разреза, т.е.

$$\Delta = \Delta_p \tag{I0}$$

I.при пролете частицы в ...

$$\Delta_p=-\frac{8e^2}{\pi c}\left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2\int\limits_0\int\limits_{c\sqrt{\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}}\frac{\varkappa^3 d\varkappa\ d\omega}{\Lambda_0'^2\ \Lambda'^2}\,\mathrm{Sin}\,a\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\sigma}{c^2}-\varkappa^2}\left(\mathrm{Sin}\frac{\omega}{v}a-\mathrm{Sin}\frac{\omega}{c}a\right) \tag{II}$$

Обозначив $x=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\sigma}{c^2}-\varkappa^2}$ и, сделав несложные преобразования, получим:

$$\Delta_p=-\frac{16e^2}{\pi\beta^8}\left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2\int\limits_0^{\varkappa_0}\int\limits_0^{\infty}\frac{\varkappa^3 d\varkappa\, x\, dx}{\Lambda_0''^2\ \Lambda''^2}\,\mathrm{Sin}\,ax\,\frac{\mathrm{Sin}\frac{a(1-\beta)}{2\beta}\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}}{\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}}\left[1-2\,\mathrm{Sin}^2\frac{a(1-\beta)}{4\beta}\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}\right] \tag{I2}$$

где

$$\Lambda_0''=\left(x^2+\frac{\sigma}{c^2}\right)\left(1-\beta^2\right)+\varkappa^2;\qquad \Lambda''=x^2\left(1-\beta^2\right)+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2$$

Формулу (I2) удобно записать в следующем виде:

$$\Delta_p=\int\limits_0^{\varkappa_0}\int\limits_0^{\infty}f(\varkappa,x)\,d\varkappa\,dx-2\int\limits_0^{\varkappa_0}\int\limits_0^{\infty}f(\varkappa,x)\,\varphi(\varkappa,x)\,d\varkappa\,dx \tag{I3}$$

где

$$f(\varkappa,x)=-\frac{16e^2}{\pi\beta^8}\left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2\frac{\varkappa^3 x\,\mathrm{Sin}\,ax\ \mathrm{Sin}\frac{a(1-\beta)}{2\beta}\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}}{\Lambda_0''^2\ \Lambda''^2\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}}$$

$$\varphi(\varkappa,x)=\mathrm{Sin}^2\frac{a(1+\beta)}{4\beta}\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2} \tag{I4}$$

Поскольку $\varphi(\varkappa,x)$ знакопостоянная функция, то несложный анализ показывает, что мы можем её мажорировать единицей и в результате

$$\left|\Delta_p\right|\leqslant\int\limits_0^{\varkappa_0}\int\limits_0^{\infty}f(\varkappa,x)\,d\varkappa\,dx\equiv\Delta' \tag{I5}$$

Для вычисления последнего интеграла распространим интегрирование по x от $-\infty$ до $+\infty$, воспользовавшись четностью

подынтегральной функции, и заменим $\mathrm{Sin}\,ax$ на e^{ia}.
Тогда

$$\Delta'=\frac{8ie^2}{\pi\beta^8}\left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2\int\limits_0^{\varkappa_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varkappa^3 d\varkappa\, x\, dx\, e^{iax}}{\Lambda_0''^2\ \Lambda''^2}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\frac{a(1-\beta)}{2\beta}\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}}{\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}} \tag{I6}$$

Из-за наличия корня $\sqrt{x^2+\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}$ в плоскости комплексной переменной x необходимо сделать разрез от $-i\sqrt{\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}$ до $+i\sqrt{\frac{\sigma}{c^2}+\varkappa^2}$ (см.рис.2). Определив мнимую часть указанного корня положительной во всей плоскости нетрудно видеть, что подынтегральная функция справа и слева от линии разреза имеет один и тот же знак. Следовательно, путь интегрирования по x от $-\infty$ до $+\infty$ можно заменить контуром, указанным на рис.2 сплошной линией, так как часть интеграла, связанная с разрезом равна нулю. Замкнем теперь указанный контур интегрирования верхней полуокружностью бесконечно большого радиуса (см.пунктирную линию на рис.2), на которой интеграл экспоненциально стремится к нулю.

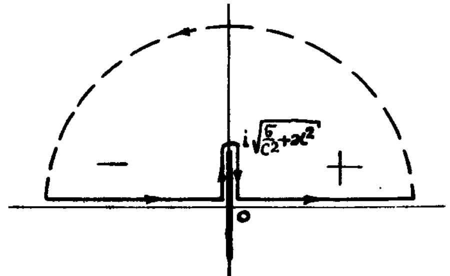

Рис 2

Таким образом выражение (I6) преобразуется к виду, где вместо интегрирования по x от $-\infty$ до $+\infty$ надо взять замкнутый контур показанный на рис.2, т.е. найти вычеты подынтегрального выражения в верхней полуплоскости.

Расчет показывает, что Δ' можно пренебречь относительно W_2', поскольку члены, получающиеся при интегрировании (16) или убывают с энергией, или затухают экспоненциально, как $exp\left(-\frac{a\varkappa_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$.

5. Таким образом, при выполнении условия (4), мы можем считать, что

$$W_2 = W_2' \tag{17}$$

Для вычисления W_2' воспользуемся методом Ландау, т.е. замкнем путь интегрирования по действительной оси в плоскости ω верхней полуокружность бесконечно большого радиуса, на которой первый член подынтегрального выражения (6) убывает как $\frac{1}{\omega^3}$, а второй член - как $exp\left(\frac{2i\omega a}{v}\right)/\omega^3$. Следовательно значением интеграла на этой полуокружности можно пренебречь и наш искомый интеграл будет равен сумме вычетов подынтегрального выражения в верхней полуплоскости. Полюса имеются в точках, где обращаются в нуль Λ_0 и Λ. В результате расчет приводит к следующей формуле:

$$W_2 = \alpha - e^2\left(\frac{1}{a} + \frac{\sigma}{c^2 x_1}\right)e^{-ax} + e^2\left(\frac{1}{a} - \frac{2\sigma}{c^2 x_0} + \frac{32\sigma}{c^2 a^2 x_0^3} + \frac{64\sigma}{c^2 a^3 x_0^4}\right)e^{-\frac{a x_0}{2}} -$$

$$- \frac{e^2 \sigma a}{c^2}\left[2K_0(ax_0) + \frac{32}{a^2 x_0^2} K_2(ax_0) + \frac{4}{a x_0} K_1(ax_0) + Ei(-ax_1) + Ei\left(-\frac{a x_0}{2}\right)\right] \tag{18}$$

где

$$\alpha = \frac{8e^2}{v}\int_0^{\Omega} \frac{\varepsilon(i\omega)\, X_2\, e^{-\frac{\omega a}{v}(x_2-\beta)}}{(\varepsilon(i\omega)+x_2)^2 - (\varepsilon(i\omega)-X_2)^2 e^{-\frac{2\omega a}{v}} x_2} \tag{19}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{v^2} + \frac{\sigma}{c^2}} - \frac{\Omega}{c}\ ; \quad x_0 = \frac{\sqrt{\sigma}}{c}\sqrt{1-\beta^2}; \quad x_2 = \sqrt{1-\beta^2(1-\varepsilon(i\omega))}$$

$Ei(z)$ - интегральная показательная функция, $K_\nu(z)$ - цилиндрическая функция мнимого аргумента, Ω - частота, начиная с которой можно считать $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\sigma}{\omega^2}$.

Отметим, что при вычислении выражения W_2' на величину σ было наложено следующее условие

$$\sqrt{\sigma} \geqslant \Omega\, \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2} \tag{20}$$

Таким образом полные потери энергии частицы определяются суммой выражений W_1 и W_2, задаваемых соответственно формулами (3) и (18). Выражение W_1 не зависит от толщины пластины и, следовательно, дает потери энергии, происходящие на каждой из границ пластины независимо, т.е. удвоенное переходное излучение на одной границе, W_2 же зависит от толщины пластины и поэтому описывает как взаимное влияние границ на переходное излучение, так и те потери, которые зависят от пройденного частицей пути.

Если в выражении для W устремить σ к нулю, то согласно (20) необходимо и Ω устремить к нулю. В этом случае (3) и (18) обращаются в нуль, что и должно было быть.

6. Произведем анализ формул (3) и (18), рассматривая следующие частные случаи

а)

$$a \gg \frac{c}{\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\beta^2}} \tag{21}$$

т.е. когда толщина пластины больше зоны формирования переходного излучения. При условии (21) нетрудно видеть, что все члены выражения (18) экспоненциально убывают с энергией. Тогда, пренебрегая ими относительно (3), получим:

$$W = -\frac{2}{3}\,\frac{e^2\sqrt{\sigma}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \tag{22}$$

что и следовало ожидать [1].

б) Толщина пластины настолько мала, что можно разложить в ряд по толщине пластины все члены формулы (18).

В этом случае получаем;

$$W = -\frac{e^2 \sigma a}{c^2}\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma}}{\bar{\omega}\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}\right) + \frac{e^2 \pi \sigma a^2}{4 v^3 \bar{\Omega}} \tag{23}$$

где

$$\ln\bar{\omega} = \frac{\int_0^\infty \omega \varepsilon''(\omega) \ln\omega\, d\omega}{\int_0^\infty \omega \varepsilon''(\omega)\, d\omega} \tag{24}$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty xy\, \varepsilon''(x)\, \varepsilon''(y)\, dx\, dy}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{xy}{x+y}\, \varepsilon''(x)\, \varepsilon''(y)\, dx\, dy} \tag{25}$$

Из требования малости квадратичного члена формулы (23) относительно линейного, получаем условие на верхнюю границу толщины пластины, при котором ионизационные потери растут логарифмически с ростом энергии частицы:

$$a \ll \frac{4c\bar{\Omega}}{\pi\sigma}\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma}}{\bar{\omega}\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{2}\right) \qquad (26)$$

Заметим, что квадратичный член формулы (23) в точности совпадает с аналогичным членом, полученным в [3], разложением подынтегрального выражения в ряд по толщине пластинки и последующим интегрированием по переменным ω и $\varkappa$.

7. Таким образом, основная идея расчета, как это видно из формул (5)-(7), заключается в том, что трудный для вычислений в выражении для W_2 член с $\exp[i(\lambda-\frac{\omega}{v})a]$ заменяется на $\exp[i(\lambda-\frac{\omega}{c})a]$ в результате чего появляется добавочный член Δ. Новое выражение W_2' можно уже вычислить методом Ландау, а выражение для Δ оказывается более простым чем W_2 и его удается оценить, а затем и пренебречь в случае крайне-релятивистских частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.М.Гарибян, ЖЭТФ, 37,527, (1959)
2. А.И.Алиханян, А.К.Вальтер, Г.М.Гарибян, И.А.Гришаев, М.П.Лорикян, В.А.Петренко, Г.Л.Фурсов, ЖЭТФ, 44,1122 (1963) 46, 1212 (1964)
3. Г.М.Гарибян, М.М.Мурадян Изв.АН Арм.ССР, физика, I,310, (1966)
4. В.Е.Пафомов, Изв. ВУЗ-ов, Радиофизика, т.У., № 6,1072, (1962)
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц "Электродинамика сплошных сред" гл.ХП, М. ГИТТЛ (1957)
6. Г.М.Гарибян, С.С.Элбакян, Изв. АН Арм.ССР, физика, I, 279, (1966)
7. Ф.Г.Басс, В.М.Яковенко УФН, 86,189 (1965)
8. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат: Методы теории функции комплексного переменного", М.,"Наука", (1965)

Рукопись поступила 4 сентября 1968г.